STABILITA' DEI SISTEMI LINEARI

Introduzione

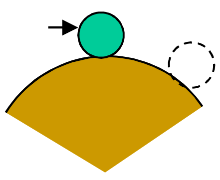
<u>Definizione</u>: lo stato di un sistema è rappresentato dalla quantità e distribuzione dell'energia all'interno del sistema, ed è riassumibile col valore assunto dalle variabili di stato.

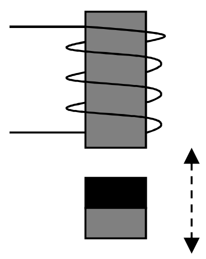
Lo studio del *comportamento di un sistema* si effettua esaminando l'evoluzione del suo stato.

Quando il sistema permane in un determinato stato, cioè le sue variabili di stato permangono nei loro valori, lo stato è definito 'stato di equilibrio'.

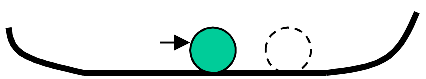
Lo stato di equilibrio può essere:

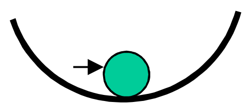
- instabile: Il disturbo temporaneo fa cambiare stato al sistema.

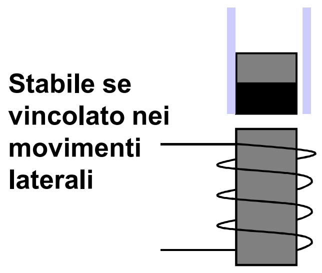




- stabile: Il disturbo temporaneo provoca variazioni limitate dello stato (temporanee o permanenti).





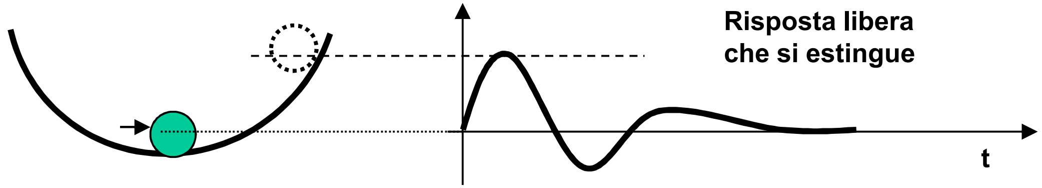


Nei controlli industriali si pretende però che, col venir meno della perturbazione, *lo stato ritorni a quello di partenza*, in quanto diversamente la variabile controllata verrebbe a dipendere oltre che dall'ingresso di controllo, anche dalle perturbazioni presentatesi in passato.

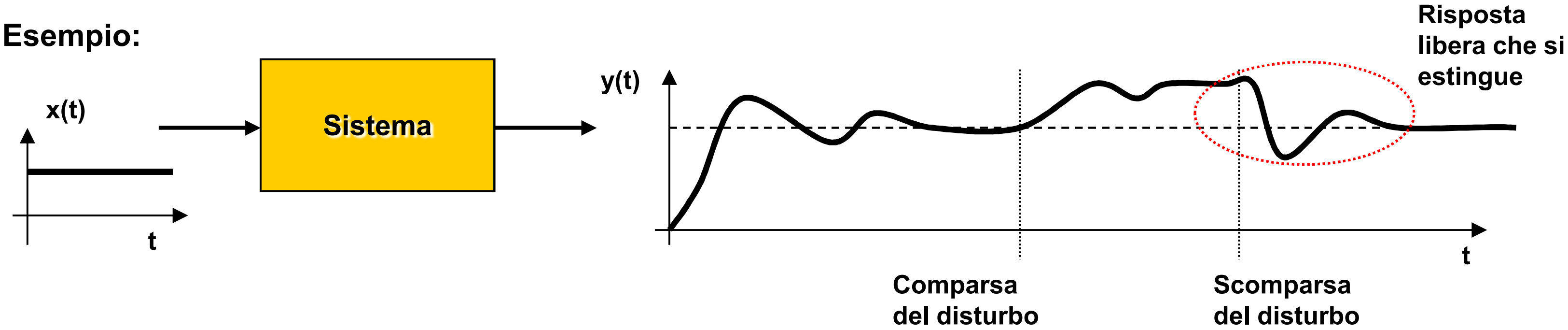
Nei sistemi la *variabile controllata* deve dipendere solo dall'ingresso di controllo (ingresso forzante), deve cioè essere descritta dai soli termini della *componente forzata*. Solo così il controllore può controllare la variabile d'uscita del sistema.

Ciò equivale a pretendere che il sistema di controllo sia caratterizzato da una ***risposta libera*** che tenda ad ***estinguersi*** in seguito alla scomparsa della perturbazione.

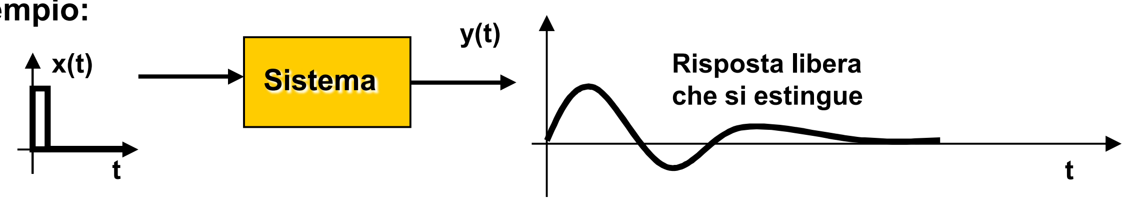
Esempio:



Esempio:



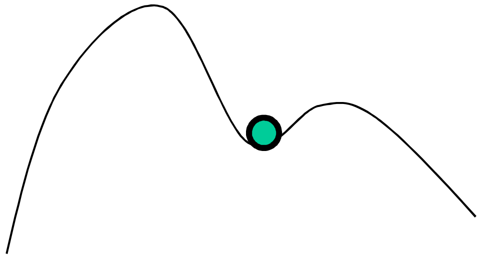
Esempio:



Nei sistemi lineari la stabilità dell'intero sistema è garantita dalla stabilità di *un singolo stato di equilibrio*, in quanto se la risposta libera si estingue a partire da uno stato si estingue a partire da qualsiasi altro stato di equilibrio.

Ciò non è vero per i sistemi ***non lineari***. Per essi lo studio della stabilità dell'intero sistema richiede lo studio della stabilità di ***ogni singolo stato di equilibrio***, che, in questi sistemi, dipende *dall'****ampiezza del disturbo***.

Esempio:



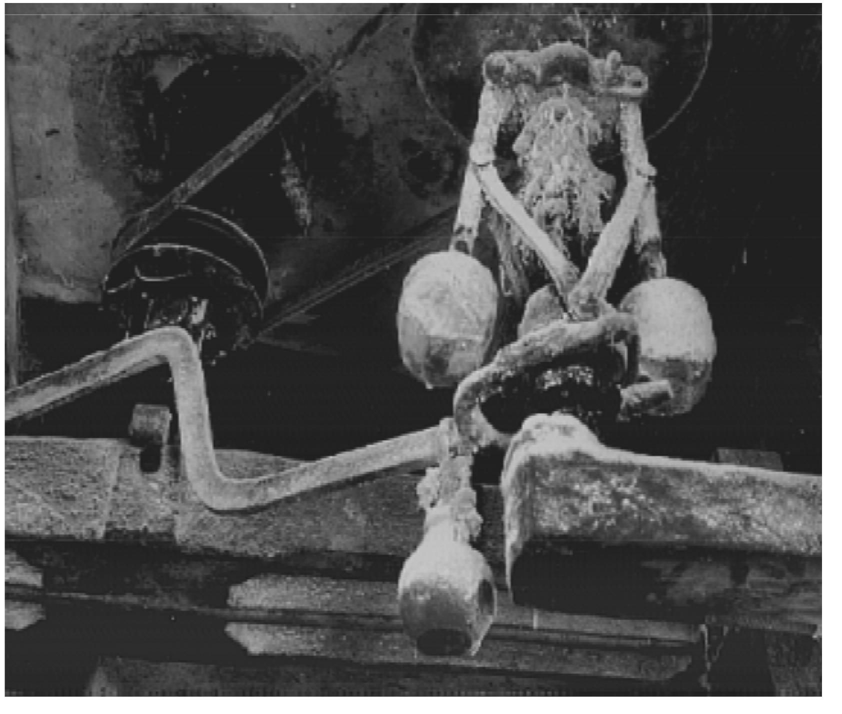
Regolatore di Watt

I primi problemi seri di stabilità dei sistemi emersero con la rivoluzione industriale, quando **James Watt** cercò di controllare la portata del vapore in relazione alla velocità di rotazione della macchina.

La macchina a vapore infatti doveva funzionare a velocità costante e ciò richiedeva il controllo della portata del vapore. Un meccanismo da inventare.

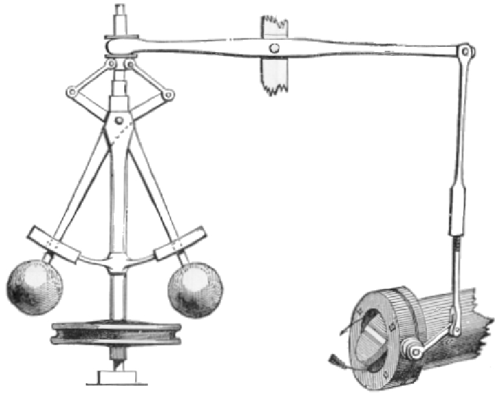
In una lettera del 28 maggio 1788 Boulton descrisse a Watt il meccanismo del *lift-tenter* con cui, nei mulini a vento, si regolava la distanza della pietra di macina superiore in relazione alla velocità.

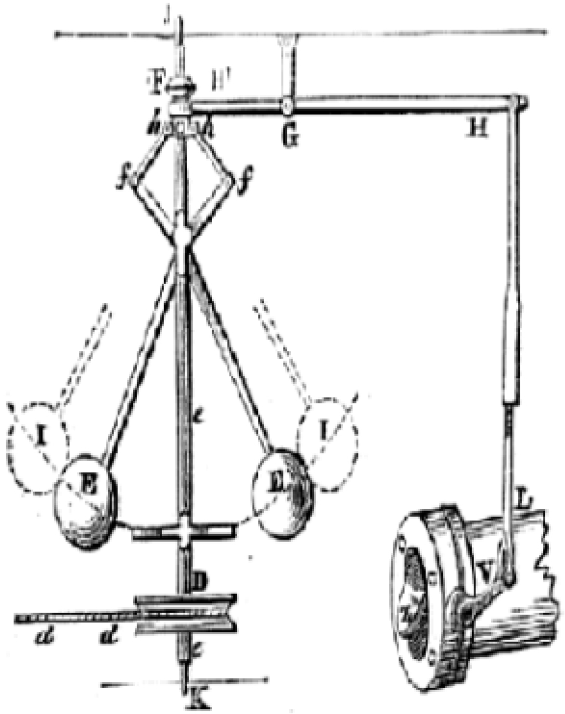
Lift – tenter in un mulino a vento del '700. Prima della sua introduzione il mugnaio doveva regolare la distanza tra le pietre di macina manualmente, per mezzo di una leva.



Watt intuì che quel meccanismo poteva essere adattato per controllare la velocità della macchina a vapore e costruì il ***regolatore***.

Macchina di Watt-Boulton, con reolgatore 1788





La macchina a vapore di Watt fu presto ulteriormente perfezionata:

- Watt: macchina a doppio effetto, col vapore che spinge prima una faccia del pistone, poi quella opposta
- J. Pichard (concorrente di Watt): sistema biella-manovella per trasformare il moto traslatorio del pistone in rotatorio.

Con questi miglioramenti la tecnologia del vapore penetrò nei trasporti, sia terresti che navali:

- 1804: R. Trevthick inaugurò il primo viaggio di una locomotiva su rotaia
- 1819: il primo veliero munito di motore a vapore ausiliario
  1836: la prima nave mossa con solo motore a vapore

La diffusione dell'automazione aveva sempre suscitato preoccupazione presso gli operai e i garzoni. Spesso si verificarono isolati atti di protesta volti alla distruzione delle macchine.

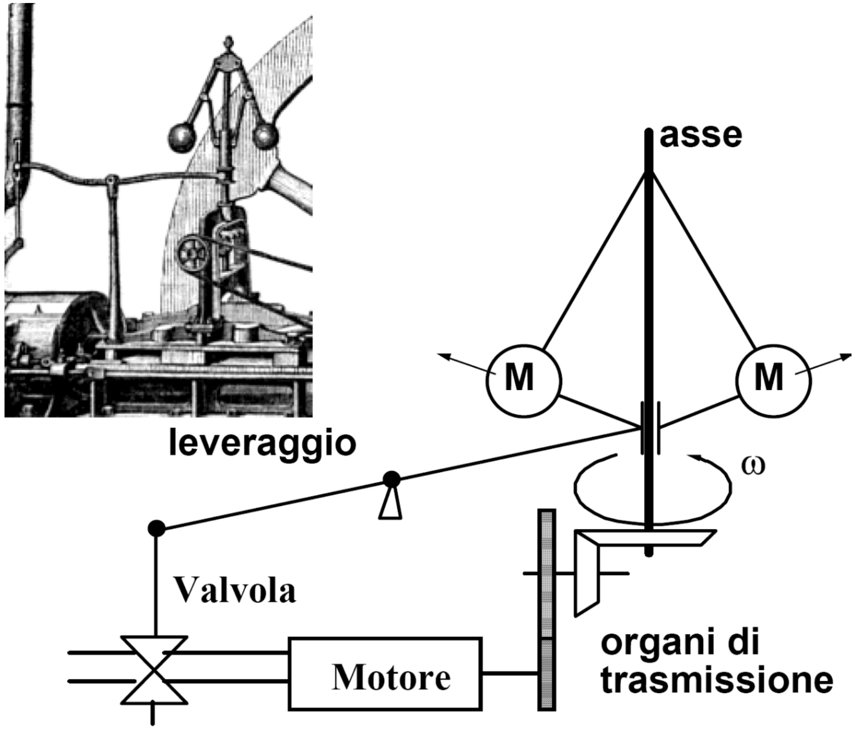
Ma nel 1811-1812, in Inghilterra, la rivolta fu molto più vasta. Il movimento prese il nome dall'operaio Ned Lud che, sembra in un momento di rabbia, aveva distrutto due telai meccanici nel 1779. Il "luddismo" accomunò operai manifatturieri (contro l'automatizzazione della produzione) e salariati agricoli (contro trebbiatrici automatiche).

I primi regolatori di Watt funzionavano in modo soddisfacente.

Ma col passare dei primi decenni dell'800 si osservò un comportamento sempre meno soddisfacente da parte dei nuovi regolatori: sempre meno capaci di stabilizzare la velocità e sempre più inclini a produrre pendolamenti nel valore della velocità.

Fino ad allora si era proceduto per via empirica, senza mai affrontare il problema guardando l'insieme impianto + regolatore.

Inoltre in quei decenni furono costruiti anche altri tipi di regolatori di velocità, in fondo con gli stessi problemi. Come scegliere i parametri degli organi di trasmissione e del regolatore?



Questi problemi furono indagati

- nel 1826 da J. V. **Poncelet** (1788 – 1867), e
- nel 1840 da G. B. **Airy** (inglese, astronomo reale, 1801 – 1892).

Airy in particolare aveva applicato un regolatore ad un sistema di puntamento di un telescopio, all'osservatorio di Greenwich, per un controllo di velocità al fine di compensare la rotazione terrestre ed estendere così il tempo di osservazione dei corpi celesti. Ma in certe condizioni l'intero sistema diveniva sede di oscillazioni permanenti indesiderate.

Sia Poncelet sia Airy dimostrarono che la dinamica del regolatore poteva essere descritta da *equazioni differenziali*, mettendo tuttavia in evidenza il fatto che era difficile risolverle e trarre informazioni utili in fase di progetto.

Nel 1851 **Airy** individuò qualche condizione per la stabilità del sistema, ma l'esposizione fu poco chiara e il suo lavoro fu ignorato.

Intanto nel **1868** si potevano contare nella sola Inghilterra ben *75 000 regolatori*, *con crescenti problemi di pendolamento* delle variabili controllate.

Nel 1863 **J. C. Maxwell** (1831 - 1879), presso il King's College di Londra, fu chiamato a far parte di una commissione incaricata di stabilire gli standards di *misura di certe grandezze elettriche*. Egli condusse esperimenti facendo uso di una macchina elettrica dotata di un complesso regolatore di velocità e notò le difficoltà di stabilizzazione.

Maxwell presentò alla Royal Society una sintesi dei suoi studi nel **1868** con l'articolo "On Governors".

Maxwell: "On Governors" [Regolatore o Controllore]

NB: Maxwell si era già interessato ai problemi di stabilità studiando gli anelli di Saturno e già allora, lavorando con ***certe equazioni algebriche*** (biquadratiche) associate a quelle differenziali, aveva chiarito, potendole risolvere, *che la **stabilità** era legata al **segno delle soluzioni delle equazioni associate**.*

L'articolo comincia con la definizione di regolatore:

"A governor is a part of a machine by means of which the velocity of the machine is kept nearly uniform, notwithstanding variations in the driving-power or the resistance"

[Un regolatore è una parte della macchina per mezzo della quale la velocità della macchina è mantenuta approssimativamente costante, nonostante le variazioni nella potenza del motore o nella resistenza del carico]

Più avanti prosegue con una indicazione di metodo:

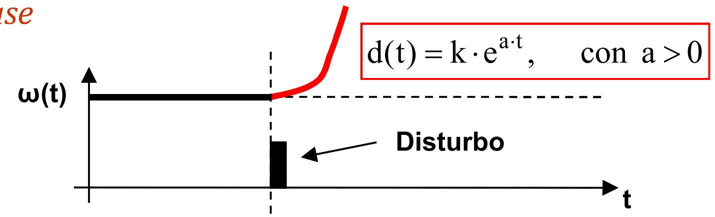
"I propose at present, without entering into any details of mechanism to direct the attention of engineers and mathematicians to the dynamical theory of such governors".

[Io propongo in questo momento, senza entrare nei dettagli del meccanismo, di dirigere l'attenzione degli ingegneri e dei matematici sulla teoria dinamica di tali regolatori]

E subito dopo continua:

"It will be seen that the motion of a machine with is governor consists in general of a uniform motion, combined with a disturbance wich may be espressed as the sum of several component motions. These components may be of four different kinds:

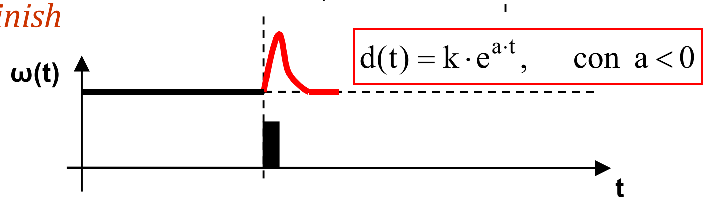
1) The disturbance may continually increase



$$d(t) = k \cdot e^{a \cdot t}, \quad \text{con } a > 0$$

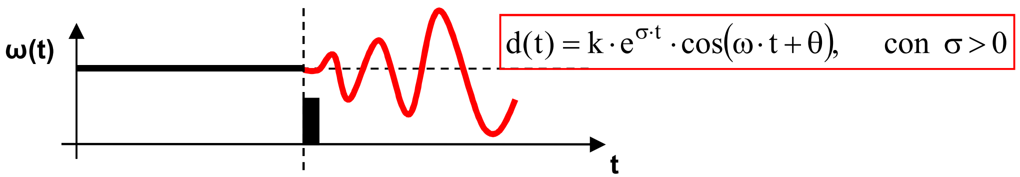
NB: queste forme d'onda corrispondono a un regolatore inserito in retroazione solo quando la velocità è prossima a quella desiderata.

2) It may continually diminish



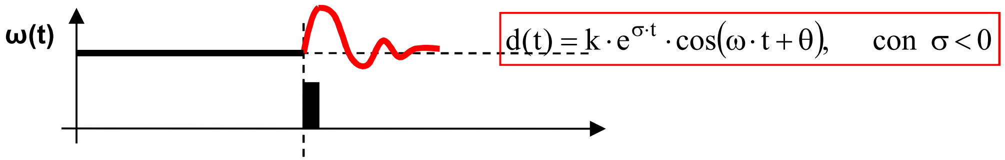
$$d(t) = k \cdot e^{a \cdot t}, \quad \text{con } a < 0$$

3) It may be an oscillation of continually increasing amplitude



$$d(t) = k \cdot e^{\sigma \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta), \quad \text{con } \sigma > 0$$

4) It may be an oscillation of continually decreasing amplitude.



$$d(t) = k \cdot e^{\sigma \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta), \quad \text{con } \sigma < 0$$

The first and third cases are evidently inconsistent with the stability of the motion; and the ***second*** *and* ***fourth*** *alone are admissibile in a good governor. This condition is mathematically equivalent to the condition that all the possible roots, and all the possible parts of the impossible roots, of a certain equation shall be negative."*

A questo punto Maxwell confessa:

> *"I have not been able completely to determine these conditions for equations of a higher degree than the third; but I hope that the subject will obtain the attention of matematicians".*

Airy si era fermato davanti all'impossibilità di risolvere le equazioni differenziali, Maxwell si concentra su una *"certain equation"* associata a quella differenziale e cerca il segno delle soluzioni senza risolverle, ma svolgendo calcoli con i coefficienti.

Maxwell scrive però che ha trovato un modo per conoscere il segno delle soluzioni dell'***equazione caratteristica*** ("certain equation") , ma solo per equazioni fino al 3° ordine e si augura che i matematici prestino maggiore attenzione al problema.

Maxwell prosegue descrivendo ***l'origine dell'instabilità***, non compresa dagli ingegneri:

"The actual motions corresponding to these impossible roots are not generally taken notice of by the inventors of such machines, who naturally confine their attention to the way in which it is designed to act; and this is generally expressed by the real root of the equation. If, by altering the adjustments of the machine, its governing power is continually increased, there is generally a limit at which the disturbance, instead of subsiding more rapidly, becomes an oscillating and jerking motion, increasing in violence till it reaches the limit of action of the governor. This takes place when the possible part of one of the impossible roots becomes positive".

[I moti effettivi corrispondenti a queste radici non reali non sono genericamente presi in considerazione dagli inventori di tali macchine, i quali naturalmente limitano la loro attenzione ad una modalità di regime in funzione della quale la macchina viene progettata, e che corrisponde in genere alla radice reale dell'equazione. Se, agendo sui comandi della macchina, la potenza viene aumentata in modo continuo, si incontra genericamente una soglia a cui il disturbo, invece che attenuarsi più rapidamente, diventa un moto oscillatorio e irregolare, aumentando la sua forza finchè non raggiunge il limite di azione del regolatore. *Questo accade quando la parte reale di una delle radici non reali diventa positiva*.]

Lo scritto di Maxwell non ebbe molta fortuna presso gli ingegneri, forse per la trattazione un po' troppo astratta.

Più fortuna ebbe lo scritto, quasi contemporaneo, del russo J. Vischnegradski, giunto alle stesse conclusioni di Maxwell. La traduzione del suo scritto in tedesco nel 1876 e francese nel 1877 fornì negli anni successivi utili indicazioni pratiche agli ingegneri per migliorare le prestazioni dei regolatori di velocità.

Il problema sollevato da Maxwell relativo alla ricerca di un procedimento generale per conoscere il segno delle soluzioni dell'equazione caratteristica, senza risolverle, fu presto risolto dal suo collega di Cambridge, il matematico E. J. Routh (1831 – 1907), che nel 1877 pubblicò un esteso trattato "*Stability of motion*".

Nel 1895 alle stesse conclusioni di Routh giunse, per via indipendente, il matematico svizzero A. Hurwitz (1859 – 1919), che era stato avvicinato al problema dall'ingegnere *A. B. Stodola* (1859 – 1942), suo collega al Politecnico di Zurigo. Stodola, impegnato nella stabilizzazione di una turbina, gli aveva mostrato il lavoro di Vischnegradski.

Nell'esposizione di Hurwitz il metodo per il calcolo del segno delle soluzioni dell'equazione caratteristica appare più semplice. Questo metodo è oggi conosciuto come *metodo di Routh-Hurwitz*.

NB: con Maxwell divenne chiaro il motivo per cui i nuovi regolatori funzionavano peggio di quelli vecchi: il miglioramento della tecnologia meccanica realizzava dispositivi con meno attriti interni, ed era proprio la diminuzione degli attriti nei regolatori che facilitava l'innesco dei pendolamenti.

Metodo di Routh - Hurwitz

Data la seguente equazione caratteristica: $a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots\dots\dots + a_1 \cdot s + a_0 = 0$

Condizione necessaria, ma non sufficiente, *affichè tutte le radici siano a parte reale negativa è che i coefficienti abbiano tutti lo stesso segno.*

Il metodo permette la determinazione del segno delle radici **senza risolvere l'equazione caratteristica**:

si costruisce la seguente tabella:

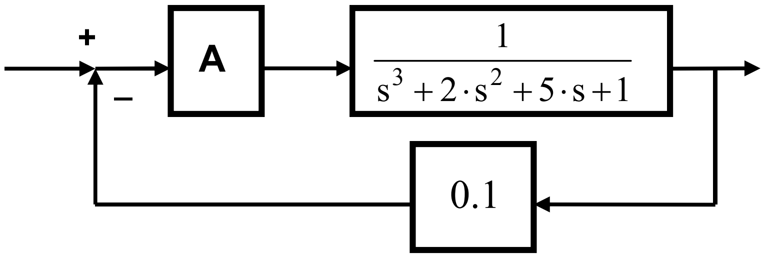
n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	…
n-1	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	…..
n-2	b_1	b_2	……	…..
…..	c_1	…..	…..	….
0	….			

$$b_1 = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-2} - a_n \cdot a_{n-3}}{a_{n-1}} \qquad b_2 = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-4} - a_n \cdot a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$c_1 = \frac{b_1 \cdot a_{n-3} - a_{n-1} \cdot b_2}{b_1}$$

<u>Regola</u>: ad ogni *variazione di segno* tra i termini consecutivi della prima colonna presentano corrisponde una radice con *parte reale positiva*, ad ogni permanenza una radice con parte reale negativa.

<u>ESEMPIO</u>:



1) Verificare la stabilità per A = 40.

2) Calcolare il valore limite di A per cui il sistema si mantiene stabile.

<u>Soluzione</u>: occorre calcolare l'equazione caratteristica del sistema: $s^3+2\cdot s^2+5\cdot s+1+A\cdot 0.1=0$

1)

3	**1**	**5**
2	**2**	**1+4**
1	**2.5**	**0**
0	**5**	

Non essendoci variazioni di segno nella prima colonna le soluzioni hanno parte reale negativa e quindi il sistema è stabile.

2)

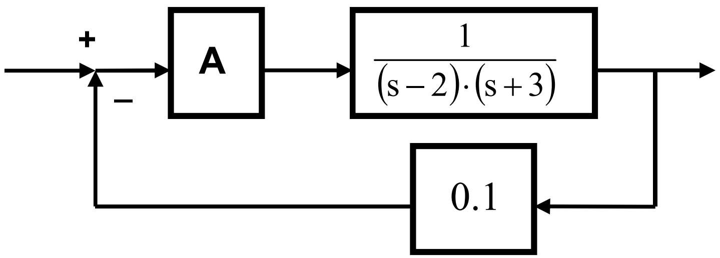
3	**1**	**5**
2	**2**	**1 + A·0.1**
1	**4.5 - A·0.05**	**0**
0	**1 + A·0.1**	

Per la stabilità non devono esserci variazioni di segno nella prima colonna:

$$\begin{cases} 4.5-A\cdot 0.05>0 \\ 1+A\cdot 0.1>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A<90 \\ A<-10 \end{cases}$$

Il guadagno negativo non ha significato pratico, per cui: A < 90.

ESEMPIO:



Calcolare il valore dell'intervallo di A per cui il sistema si mantiene stabile.

Soluzione: equazione caratteristica del sistema: $s^2 + s - 6 + A \cdot 0.1 = 0$

2	**1**	**-6 + A·0.1**
1	**1**	
0	**-6 + A·0.1**	

Per la stabilità deve essere:

$$-6 + A \cdot 0.1 > 0$$

Da cui: $A > 60$

NB: in questo esempio il sistema complessivo è tanto più stabile quanto maggiore è il guadagno. La causa è da ricercarsi nell'instabilità del blocco del ramo diretto: la retroazione, unita a un alto guadagno, stabilizza il sistema.