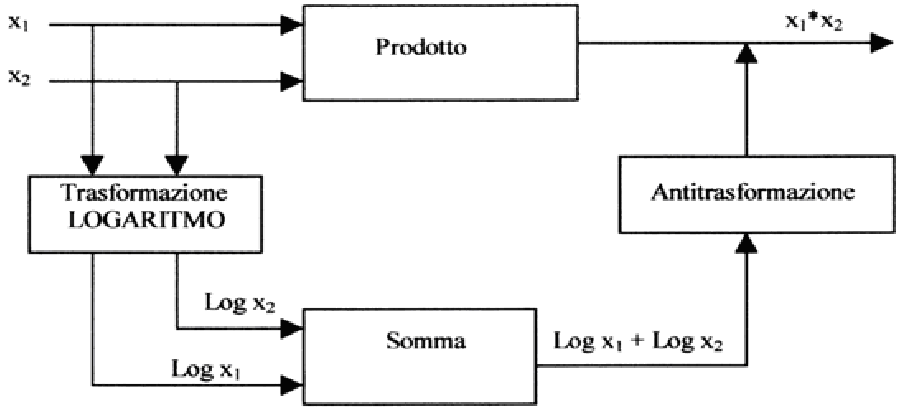
TRASFORMAZIONI

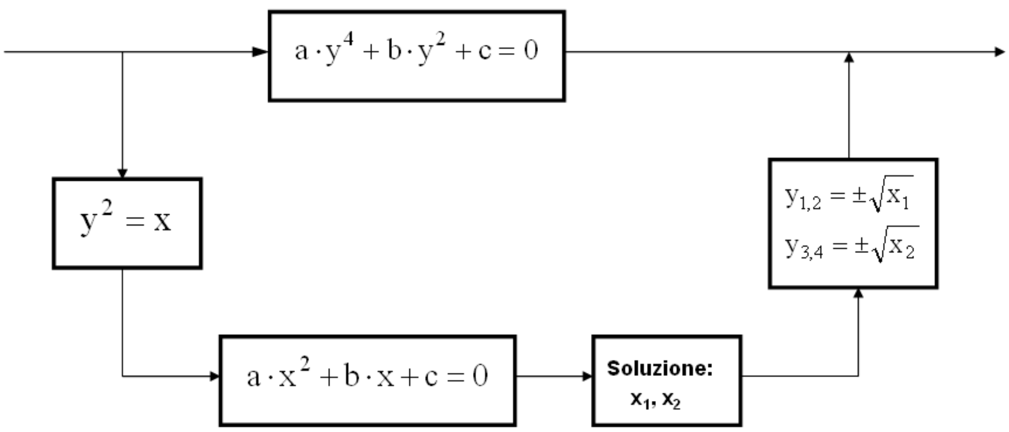
Le trasformazioni in matematica sono spesso utilizzate per aggirare le rilevanti difficoltà che si presentano nello svolgere direttamente i calcoli richiesti. Per esempio:

- nella esecuzione di calcoli come prodotti e divisioni
- nella risoluzione di equazioni come quelle biquadratiche e differenziali.

Un prodotto è convertito in somma mediante la trasformazione **Logaritmo**. Il percorso della trasformazione è più lungo, ma meno difficoltoso.

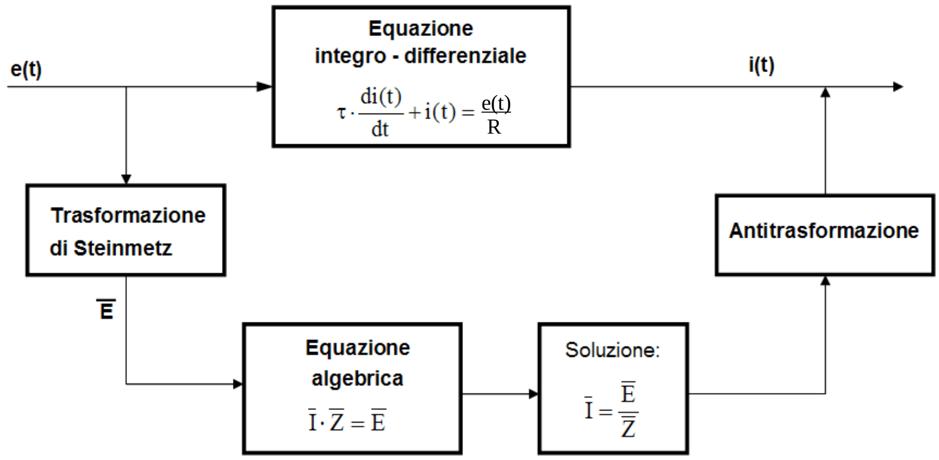


Una equazione biquadratica è risolvibile con una semplice sostituzione:



Una equazione differenziale lineare si può risolvere più facilmente con delle opportune trasformazioni.

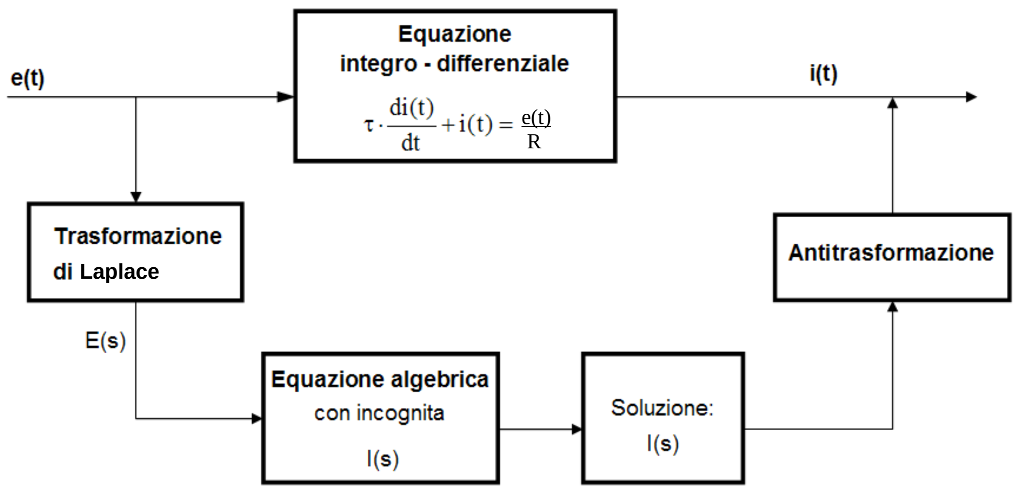
- Se le variabili di ingresso sono sinusoidali e interessa la soluzione a regime si può ricorrere alla **trasformazione di Steinmetz**: *(proposta per risolvere i circuiti elettrici in corrente alternata)*



Osservazioni: questa trasformazione

- non *fornisce informazioni sul funzionamento durante il transitorio* in quanto presuppone che l'ingresso sinusoidale sia applicato da talmente tanto tempo da essersi esauriti tutti i transitori
- ha permesso, se non la comparsa, certamente una *migliore gestione* del *concetto di* ***impedenza*** (che non esiste nel dominio del tempo).

- Per le variabili di ingresso che hanno andamenti generici e sono nulle per **t <= 0** è stato elaborato un procedimento noto col nome di **Trasformata di Laplace**



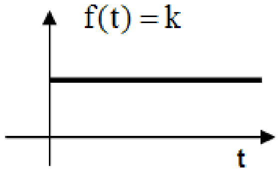
Osservazione:

La soluzione descrive il funzionamento del circuito a partire da t = 0, comprendendo quindi oltre al ***regime***, anche il ***transitorio*** (in quanto si segue l'ingresso sin dalla sua prima applicazione al sistema: cioè per t >= 0).

TRASFORMAZIONE DI LAPLACE

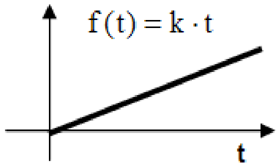
Alcune trasformate:

$$f(t) = k$$



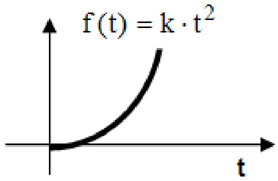
$$F(s) = \frac{k}{s}$$

$$f(t) = k \cdot t$$



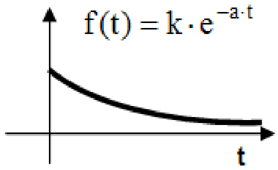
$$F(s) = \frac{k}{s^2}$$

$$f(t) = k \cdot t^2$$



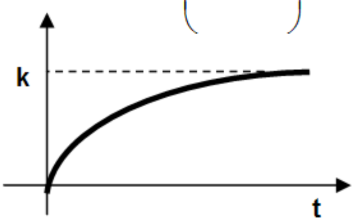
$$F(s) = \frac{2 \cdot k}{s^3}$$

$$f(t) = k \cdot e^{-a \cdot t}$$



$$F(s) = \frac{k}{s+a}$$

$$f(t) = k \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$



$$F(s) = \frac{k}{s \cdot (1 + \tau \cdot s)}$$

$$\mathbf{L}\left[k \cdot t \cdot e^{-a \cdot t}\right] = \frac{k}{(s+a)^2}$$

Trasformata della derivata: $\mathbf{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = s \cdot F(s) - f(0)$

ANTITRASFORMAZIONE DI LAPLACE

Data una funzione di Laplace F(s), si definiscono:

- **zeri** di F(s) i valori di **s** che annullano il *numeratore*
- **poli** di F(s) i valori di **s** che annullano il *denominatore.*

Antitrasformazioni immediate:

- $F(s) = \frac{6}{s}$ $\quad f(t) = 6$
- $F(s) = \frac{5}{s^3}$ $\quad f(t) = \frac{5}{2} \cdot t^2$
- $F(s) = \frac{6}{s+2}$ $\quad f(t) = 6 \cdot e^{-2 \cdot t}$

Antitrasformazioni per fratti semplici:

<u>Esempio</u>: $F(s) = \frac{s+4}{s^2 - s - 2}$ calcolare: f(t)

Una funzione razionale (rapporto tra polinomi) può essere scomposta in somma di fratti semplici:

Residuo

$$F(s) = \frac{R_1}{s - s_1} + \frac{R_2}{s - s_2}$$

Polo

Da cui è immediata la antitrasformazione:

$$f(t) = R_1 \cdot e^{s_1 \cdot t} + R_2 \cdot e^{s_2 \cdot t}$$

Quindi:

- calcolo dei **poli** di F(s): risulta: $s_1 = 2$, $s_2 = -1$.
- calcolo dei **residui** relativi ai poli:

conviene scrivere il denominatore di F(s) come prodotto di binomi:

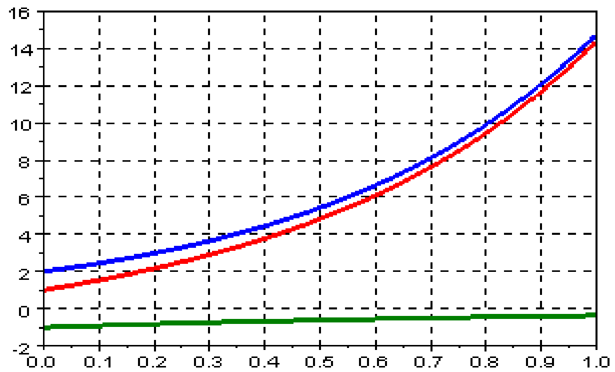
$$F(s) = \frac{s+4}{(s-s_1)\cdot(s-s_2)} = \frac{s+4}{(s-2)\cdot(s+1)}$$

$$R_1 = \left[(s-s_1)\cdot\frac{s+4}{(s-s_1)\cdot(s-s_2)}\right]_{s=s_1} = \left[\frac{s+4}{s-(-1)}\right]_{s=2} = \frac{2+4}{2+1} = 2$$

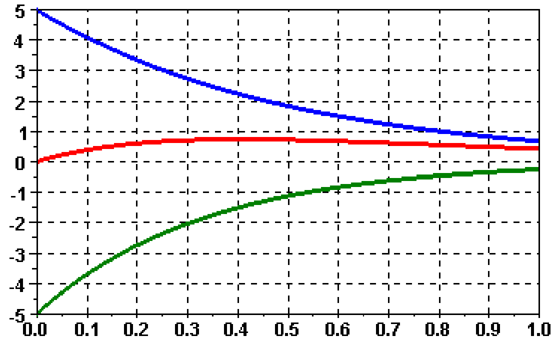
$$R_2 = \left[(s-s_2)\cdot\frac{s+4}{(s-s_1)\cdot(s-s_2)}\right]_{s=s_2} = \left[\frac{s+4}{s-2}\right]_{s=-1} = \frac{-1+4}{-1-2} = -1$$

Infine:

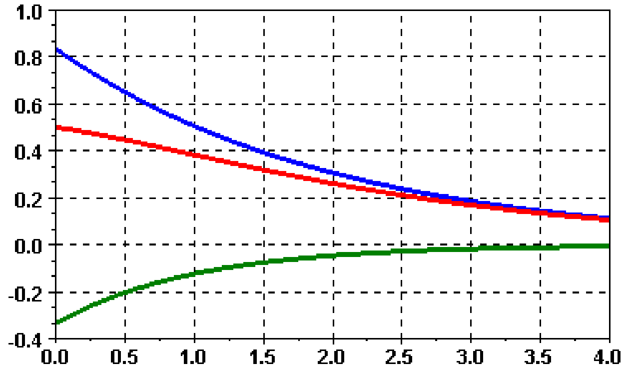
$$F(s) = \frac{2}{s-2} + \frac{-1}{s+1}$$ da cui: $$f(t) = 2\cdot e^{2\cdot t} - e^{-1\cdot t}$$



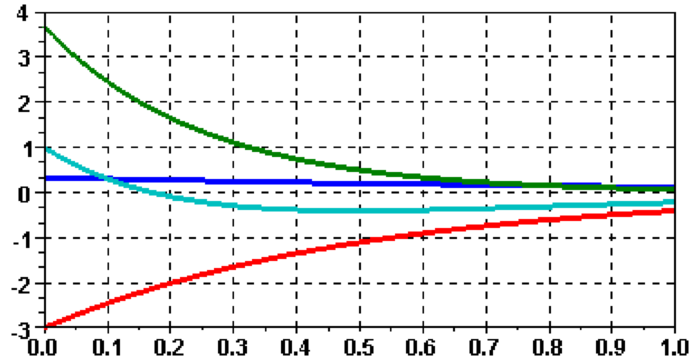
<u>Esercizio</u>: $$F(s) = \frac{5}{(s+2)\cdot(s+3)}$$ $$f(t) = 5\cdot e^{-2\cdot t} - 5\cdot e^{-3\cdot t}$$



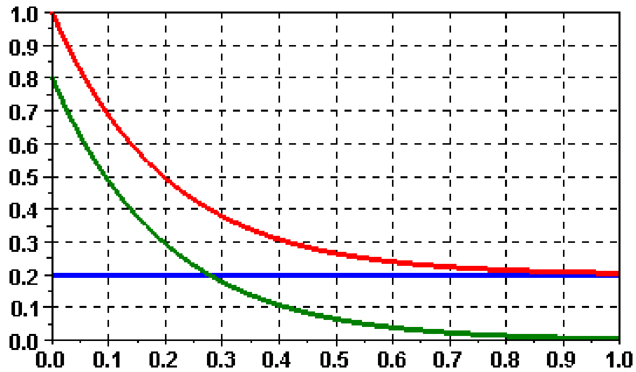
Esercizio: $F(s)=\dfrac{s+2}{2\cdot s^2+s-1}$ $f(t)=\dfrac{5}{6}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot t}-\dfrac{1}{3}\cdot e^{-1\cdot t}$



Esercizio: $F(s)=\dfrac{s^2-2\cdot s-2}{s^3+7\cdot s^2+14\cdot s+8}$ $f(t)=\dfrac{1}{3}\cdot e^{-t}+\dfrac{11}{3}\cdot e^{-4\cdot t}-3\cdot e^{-2\cdot t}$



Esercizio: $F(s)=\dfrac{s+1}{s^2+5\cdot s}$ $f(t)=\dfrac{1}{5}+\dfrac{4}{5}\cdot e^{-5\cdot t}$



Esercizio: $$F(s)=\frac{4s+2}{s(s+3)^2}=\frac{R_1}{s}+\frac{R_2}{s+3}+\frac{R_3}{(s+3)^2}$$

NB:

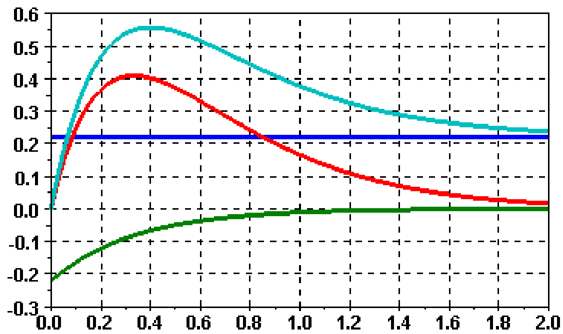
- il calcolo dei residui **R_2** e **R_3** non è più possibile con le formule viste in precedenza, occorre introdurre delle variazioni, oppure seguire un altro metodo;
- mentre **R_1** può essere calcolato senza problemi:
  - isolatamente: $$R_1=\left[s\cdot\frac{4s+2}{s(s+3)^2}\right]_{s=0}=\frac{2}{9}$$
  - oppure insieme a R_2 e R_3.

Calcolo dei residui **R_2** e **R_3**:

$$F(s)=\frac{4s+2}{s(s+3)^2}=\frac{R_1}{s}+\frac{R_2}{s+3}+\frac{R_3}{(s+3)^2}=\frac{(R_1+R_2)\cdot s^2+(6R_1+3R_2+R_3)\cdot s+9R_1}{s(s+3)^2}$$

$$\begin{cases}R_1+R_2=0\\6R_1+3R_2+R_3=4\\9R_1=2\end{cases}$$

$$\begin{cases}R_2=-\frac{2}{9}\\R_3=\frac{10}{3}\\R_1=\frac{2}{9}\end{cases}$$



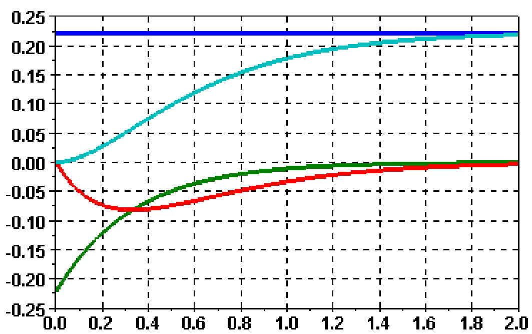
Risultato: $f(t)=\frac{2}{9}-\frac{2}{9}\cdot e^{-3t}+\frac{10}{3}\cdot t\cdot e^{-3t}$

Esercizio: $$F(s)=\frac{2}{s(s+3)^2}=\frac{R_1}{s}+\frac{R_2}{s+3}+\frac{R_3}{(s+3)^2}=\frac{(R_1+R_2)\cdot s^2+(6R_1+3R_2+R_3)\cdot s+9R_1}{s(s+3)^2}$$

Calcolo dei residui:

$$\begin{cases}R_1+R_2=0\\6R_1+3R_2+R_3=0\\9R_1=2\end{cases}$$

$$\begin{cases}R_2=-\frac{2}{9}\\R_3=-\frac{2}{3}\\R_1=\frac{2}{9}\end{cases}$$



Risultato: $f(t)=\frac{2}{9}-\frac{2}{9}\cdot e^{-3t}-\frac{2}{3}\cdot t\cdot e^{-3t}$

Osservazione: un numeratore di F(s) diverso si riflette solo in ***residui diversi***.

Antitrasformazione in presenza di **poli complessi coniugati**:

Se i poli sono complessi coniugati, tali risultano anche i residui:

Parte reale dei poli

Parte immaginaria dei poli

$$f(t) = 2 \cdot k \cdot e^{\sigma \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta)$$

Modulo dei residui

Fase del residuo relativo al polo con parte immaginaria > 0

Esercizio: $F(s) = \dfrac{s+1}{s^2 + 4 \cdot s + 13}$ **Poli**: $s_1 = -2 + j \cdot 3$ $s_2 = -2 - j \cdot 3$

Quindi: $F(s) = \dfrac{R_1}{s - (-2 + j3)} + \dfrac{R_2}{s - (-2 - j3)}$

Residui:

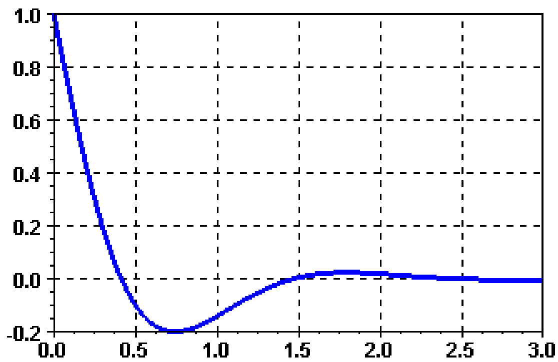
$$R_1 = \left[(s - s_1) \cdot \frac{s+1}{(s - s_1) \cdot (s - s_2)} \right]_{s=s_1} = \frac{-2 + j3 + 1}{-2 + j3 + 2 + j3} = \frac{-1 + j3}{j6} = \frac{(-1 + j3) \cdot (-j6)}{36} = \frac{1}{2} + j\frac{1}{6}$$

$$R_2 = \left[(s - s_2) \cdot \frac{s+1}{(s - s_1) \cdot (s - s_2)} \right]_{s=s_2} = \frac{-2 - j3 + 1}{-2 - j3 + 2 - j3} = \frac{-1 - j3}{-j6} = \frac{(-1 - j3) \cdot (j6)}{36} = \frac{1}{2} - j\frac{1}{6}$$

Calcolo **k:** $k = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{18}} \approx 0.527$

Fase **R₁**: $\theta = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}\right) = 0.322 \quad \mathrm{rad}$

$$f(t) = 2 \cdot 0.527 \cdot e^{-2 \cdot t} \cdot \cos(3 \cdot t + 0.322)$$



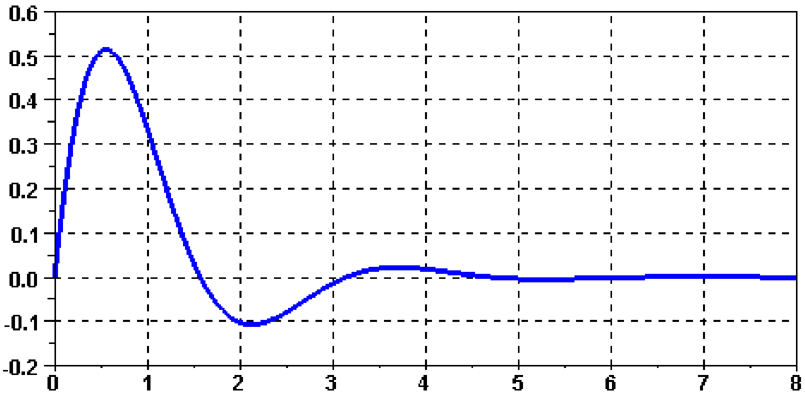
Esercizio: $F(s) = \dfrac{2}{s^2 + 2 \cdot s + 5}$

Poli: $s_1 = -1 + j \cdot 2$ $s_2 = -1 - j \cdot 2$

Residui: $R_1 = -j \cdot 0.5$ $R_2 = j \cdot 0.5$

$k = 0.5$ $\theta = -90°$

$$f(t) = 2 \cdot 0.5 \cdot e^{-t} \cdot \cos\left(2 \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)$$



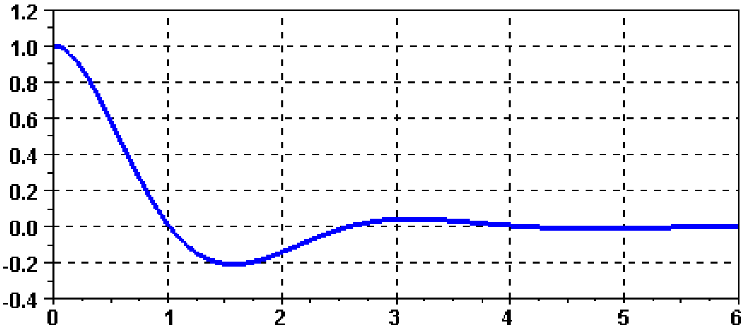
Esercizio: $F(s) = \dfrac{s + 2}{s^2 + 2 \cdot s + 5}$

Poli: $s_1 = -1 + j \cdot 2$ $s_2 = -1 - j \cdot 2$

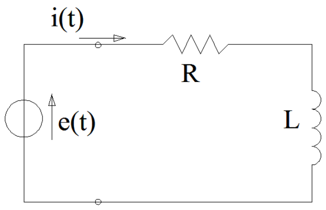
Residui: $R_1 = 0.5 - j \cdot 0.25$ $R_2 = 0.5 + j \cdot 0.25$

$k = 0.56$ $\theta = -0.464$ rad

$$f(t) = 2 \cdot 0.56 \cdot e^{-t} \cdot \cos(2 \cdot t - 0.464)$$



SOLUZIONE EQUAZIONI DIFFERENZIALI



Esempio: Circuito RL

Equazione differenziale del circuito: $$\frac{L}{R}\cdot\frac{di(t)}{dt}+i(t)=\frac{e(t)}{R}$$

Trasformazione: $$\frac{L}{R}\cdot\left(s\cdot I(s)-i(0)\right)+I(s)=\frac{E(s)}{R}$$

Da cui: $$I(s)=\frac{1}{sL+R}\cdot E(s)+\frac{L\cdot i(0)}{sL+R}$$

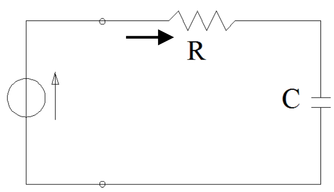
Per la antitrasformazione occorre definire la forma d'onda del segnale di ingresso e(t):

ipotesi: e(t) = k costante, quindi: $\mathrm{E(s)}=\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{s}}$

Risulta: $$\mathrm{I(s)}=\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{s}\cdot(\mathrm{sL+R})}+\frac{\mathrm{L\cdot i(0)}}{\mathrm{sL+R}}$$

Infine: $$\mathrm{i(t)}=\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{R}}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)+\mathrm{i(0)}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

Esempio: Circuito RC



Equazione differenziale: $$RC\cdot\frac{dv_C(t)}{dt}+v_C(t)=e(t)$$

Trasformazione: $$\mathrm{RC}\cdot\left(\mathrm{s}\cdot\mathrm{V_C(s)}-\mathrm{v_C(0)}\right)+\mathrm{V_C(s)}=\mathrm{E(s)}$$

Da cui: $$\mathrm{V_C(s)}=\frac{1}{1+\mathrm{sRC}}\cdot\mathrm{E(s)}+\frac{\mathrm{RC}\cdot\mathrm{v_C(0)}}{1+\mathrm{sRC}}$$

ipotesi: e(t) = k costante, quindi: $\mathrm{E(s)}=\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{s}}$

Infine: $$\mathrm{v_C(t)}=\mathrm{k}\cdot\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)+\mathrm{v_C(0)}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

RISPOSTA FORZATA E RISPOSTA LIBERA

La risposta di un sistema si può scomporre in: $y(t) = y_{FORZATA}(t) + y_{LIBERA}(t)$

- **Componente FORZATA**: componente della risposta che dipende direttamente dall'*azione forzante,* cioè dall'ingresso (corrisponde alla risposta del sistema quando quest'ultimo è, nell'istante iniziale, allo **stato zero**)

- **Componente LIBERA**: componente della risposta che non dipende direttamente dall'ingresso (*è la risposta che il sistema produce nonostante l'ingresso sia nullo*; è diversa da zero solo se il sistema ha accumulato energia in precedenza)

<u>Esempio</u>: circuito RL, ingresso x(t) = e(t) = k

$$y(t) = i(t) = \underbrace{\frac{k}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}_{\text{Componente forzata}} + \underbrace{i(0) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{Componente libera}}$$

<u>Esempio</u>: circuito RC, ingresso e(t) = k

$$v_C(t) = \underbrace{k \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}_{\text{Componente forzata}} + \underbrace{v_C(0) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{Componente libera}}$$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

La scomposizione in componente forzata e componente libera della risposta di un sistema è possibile anche nel dominio di Laplace:

$$Y(s) = Y_{FORZATA}(s) + Y_{LIBERA}(s)$$

<u>Esempio</u>: circuito RL, ingresso e(t) = k $\qquad E(s) = \frac{k}{s}$

$$I(s) = \underbrace{\frac{1}{sL+R}\cdot E(s)}_{\text{Componente forzata}} + \underbrace{\frac{L\cdot i(0)}{sL+R}}_{\text{Componente libera}}$$

<u>Ipotesi</u>: *componente libera nulla*, cioè i(0) = 0 quindi: $I(s) = I_{FORZATA}(s) = \frac{1}{sL+R}\cdot E(s)$

Il rapporto $\frac{I(s)}{E(s)} = \frac{I_{FORZATA}(s)}{E(s)} = \frac{1}{sL+R} = H(s)$

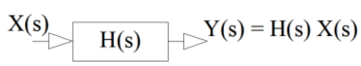
rappresenta la **funzione di trasferimento** del sistema; essa:

- dipende solo dai parametri del sistema (R, L), ed
- esprime *il rapporto tra la componente forzata dell'uscita e l'ingresso, nel dominio di Laplace.*

In generale: $H(s) = \frac{Y_F(s)}{X(s)}$

Questa relazione è importante in quanto conoscendo H(s) è possibile ricavare la componente forzata dell'uscita:

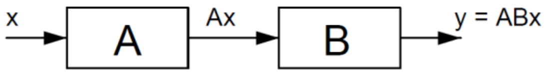
$$Y_F(s) = H(s)\cdot X(s)$$



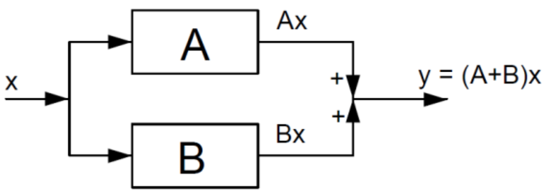
NB: La funzione di trasferimento nasce all'inizio degli anni '40 del '900 nell'ambito di ricerche volte a *rappresentare il funzionamento di sistemi lineari con <u>blocchi</u> <u>interconnessi</u>*.

ALGEBRA DEGLI SCHEMI A BLOCCHI

<u>Serie</u> (cascata):

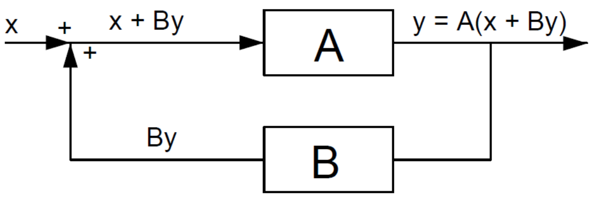


<u>Parallelo</u>:



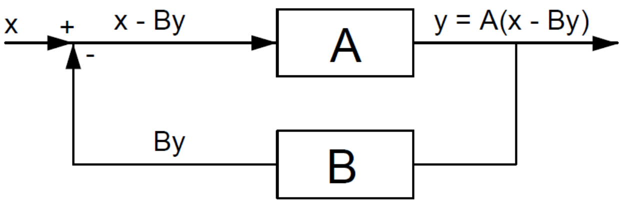
<u>Retroazione</u>:

- **Positiva**



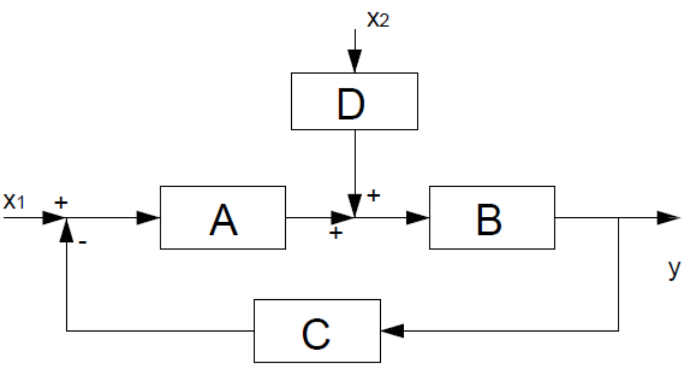
$$y = \frac{A}{(1 - AB)}\, x$$

- **Negativa**



$$y = \frac{A}{(1 + AB)}\, x$$

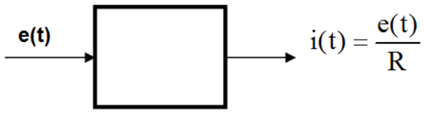
<u>Sovrapposizione degli effetti</u>:



$$y = \frac{AB}{(1 + ABC)}\, x1 + \frac{A}{(1+ABC)}\, D\, x2$$

Calcolo delle **funzioni di trasferimento** dei **componenti elettrici elementari**

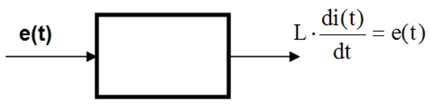
RESISTORE



$$i(t) = \frac{e(t)}{R} \qquad I(s) = \frac{E(s)}{R} = \frac{1}{R} \cdot E(s) \qquad H(s) = \frac{I(s)}{E(s)} = \frac{1}{R}$$

la funzione di trasferimento è una ***conduttanza***.

INDUTTORE



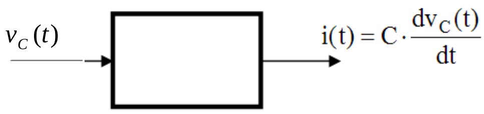
L'uscita i(t) è espressa come incognita di una equazione differenziale.

$$e(t) = L\frac{di(t)}{dt} \qquad E(s) = sL \cdot I(s) \qquad I(s) = \frac{1}{sL} \cdot E(s) \qquad H(s) = \frac{I(s)}{E(s)} = \frac{1}{sL}$$

sL rappresenta l'**impedenza induttiva** in regime generico, per cui

la funzione di trasferimento è una ***ammettenza***.

CONDENSATORE



$$i(t) = C\frac{de(t)}{dt} \qquad I(s) = sC \cdot E(s) \qquad H(s) = \frac{I(s)}{E(s)} = sC$$

1/sC rappresenta l'**impedenza capacitiva** in regime generico, per cui la funzione di trasferimento è una ***ammettenza***.

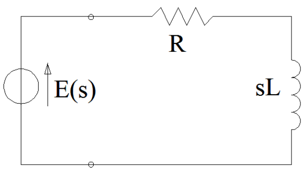
NB

- Le *funzioni di trasferimento* devono sempre presentare un *denominatore di grado superiore al numeratore*. In caso contrario esse non descrivono in modo completo il funzionamento del sistema in tutto l'intervallo di frequenza
- La risoluzione dei circuiti elettrici può essere svolta utilizzando le leggi dell'elettrotecnica.

Relazione **Poli** **-** **Costanti di tempo**

Le costanti di tempo e i poli della fdt sono in relazione reciproca.

Esempio: ingresso e(t), uscita i(t), calcolo della costante di tempo



Si tratta di un sistema del 1° ordine, quindi con *una sola costante di tempo*.
Occorre calcolare la funzione di trasferimento.

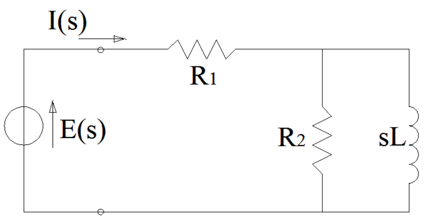
$$H(s) = \frac{I(s)}{E(s)} = \frac{1}{Z(s)} = \frac{1}{sL + R}$$

polo di H(s): $s = -\frac{R}{L}$

La costante di tempo corrisponde a: $\tau = \frac{1}{|polo|} = \frac{L}{R}$

ESERCIZI

Esercizio: Calcolare l'espressione della costante di tempo (*Ingresso: e(t)*)

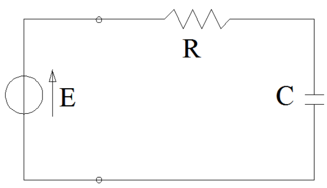


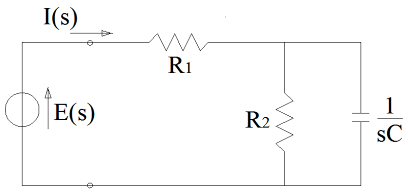
$$H(s) = \frac{I(s)}{E(s)} = \frac{1}{Z(s)} \qquad Z(s) = \frac{sL(R_1 + R_2) + R_1 \cdot R_2}{sL + R_2}$$

Polo si H(s): $s = -\frac{R_1 \cdot R_2}{L \cdot (R_1 + R_2)}$

Costante di tempo: $\tau = \frac{L(R_1 + R_2)}{R_1 \cdot R_2}$

Esercizio: Calcolare l'espressione della costante di tempo (*Ingresso: e(t)*)

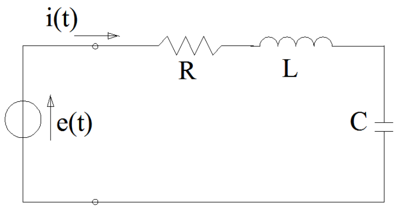




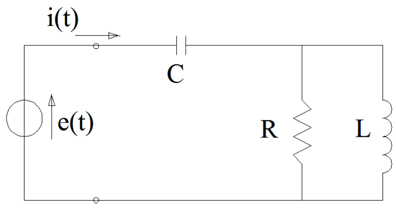
$\tau = RC$

$$H(s) = \frac{sR_1R_2C + R_1 + R_2}{sR_2C + 1} \qquad \tau = \frac{R_1R_2C}{R_1 + R_2}$$

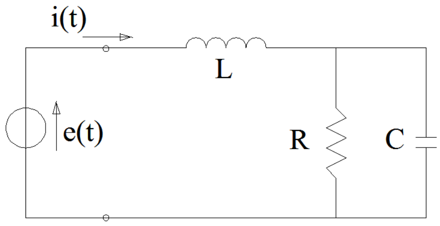
Esercizio: Calcolare la corrente **I(s)** nel dominio di Laplace:



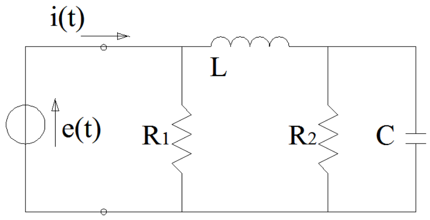
$$I(s) = \frac{E(s)}{Z(s)} = E(s) \cdot \frac{sC}{s^2LC + sRC + 1}$$



$$I(s) = \frac{E(s)}{Z(s)} = E(s) \cdot \frac{sC \cdot (sL + R)}{s^2RLC + sL + R}$$

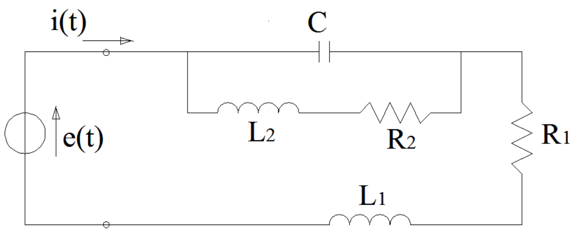


$$I(s) = \frac{E(s)}{Z(s)} = E(s) \cdot \frac{sRC + 1}{s^2RLC + s \cdot L + R}$$



$$I(s) = \frac{E(s)}{Z(s)} = E(s) \cdot \frac{s^2R_2LC + s \cdot (L + R_1R_2C) + R_1 + R_2}{s^2R_1R_2LC + sR_1L + R_1R_2}$$

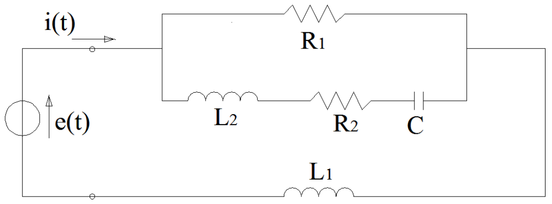
Esercizio: Calcolare la corrente **I(s)** e la tensione **V_C(s)** nel dominio di Laplace:



$$V_C(s) = E(s) \cdot \frac{s \cdot L_2 + R_2}{s^3CL_1L_2 + s^2C(L_1R_2 + L_2R_1) + s \cdot (R_1R_2C + L_1 + L_2) + R_1 + R_2}$$

$$I(s) = E(s) \cdot \frac{s^2L_2C + s \cdot R_2C + 1}{s^3CL_1L_2 + s^2C(L_1R_2 + L_2R_1) + s \cdot (R_1R_2C + L_1 + L_2) + R_1 + R_2}$$

Esercizio: Calcolare la tensione **V_C(s)** nel dominio di Laplace:



$$V_C(s) =$$

$$= E(s) \cdot \frac{s^2 \cdot L_2R_1C + s \cdot R_1R_2C + R_1}{s^3CL_1L_2 + s^2C(L_1R_2 + L_2R_1 + L_1R_1) + s \cdot (R_1R_2C + L_1) + R_1}$$