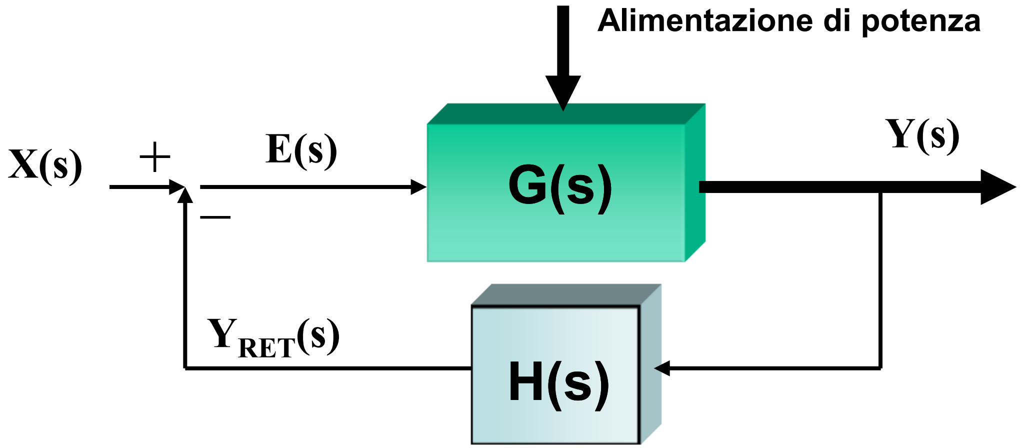
ERRORE STATICO



Per <u>errore statico</u> si intende lo *scostamento*, a regime, della variabile controllata **Y(s)** dal valore desiderato.

Tale scostamento è in relazione con il segnale errore **E(s)** uscente dal nodo di confronto: *essi hanno lo stesso valore percentuale.*

E' allora possibile svolgere i calcoli sul segnale errore E(s).

$$E(s) = X(s) - X_{RET}(s) = X(s) - H(s)\cdot Y(s) = X(s) - H(s)\cdot X(s)\cdot \frac{G(s)}{1+G(s)\cdot H(s)} = \boxed{\frac{X(s)}{1+G(s)\cdot H(s)}}$$

Il calcolo dell'errore a regime richiede il calcolo del limite $\mathbf{e_r = \lim_{t \to \infty} e(t)}$

dove è richiesta la conoscenza della funzione e(t), cioè della antitrasformata di E(s).

E' possibile evitare la antitrasformazione ricorrendo al teorema del valore finale:

$$\boxed{e_r = \lim_{t \to \infty} \mathrm{e(t)} = \lim_{s=0} \mathrm{s \cdot E(s)}}$$

e sostituendo l'espressione di E(s):

$$\boxed{e_r = \lim_{s=0} \mathrm{s} \cdot \frac{\mathrm{X(s)}}{1 + \mathrm{G(s) \cdot H(s)}} = \lim_{s=0} \mathrm{s} \cdot \frac{\mathrm{X(s)}}{1 + \mathrm{L(s)}}}$$

Osservazioni: la **precisione statica** dipende quindi dal

- ❑ Valore del segnale di ingresso X(s)
- ❑ Guadagno d'anello G(s)•H(s)

Considerazioni sul GUADAGNO D'ANELLO $L(s) = G(s) \bullet H(s)$

In assenza di *ritardi finiti*, le funzioni di trasferimento sono razionali, cioè si presentano come rapporto tra polinomi:

$$L(s) = G(s) \cdot H(s) = \frac{1}{s^n} \frac{N(s)}{D(s)}$$

I sistemi con retroazione sono classificati in **tipi**, in funzione del numero di *poli nulli* presenti nel guadagno d'anello:

n = 0 sistema tipo 0
n = 1 sistema tipo 1
n = 2 sistema tipo 2
………

Ai fini del calcolo dell'errore statico conviene porre: $$L^{'}(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

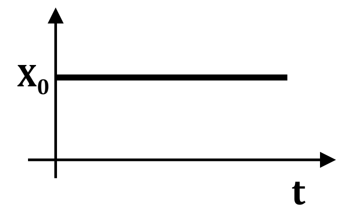
e ricavare la costante $$L_{ST} = \lim_{s=0} L^{'}(s) = \lim_{s=0} \frac{N(s)}{D(s)}$$

L_{ST} = valore statico del guadagno d'anello

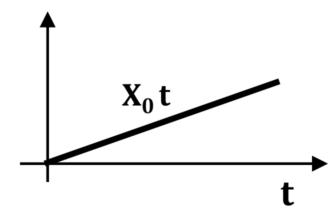
Considerazioni sul SEGNALE DI INGRESSO x(t)

Le prestazioni a regime dipendono anche dalla forma del segnale d'ingresso. In alcuni sistemi il segnale di ingresso non ha una forma prestabilita, per cui si caratterizza la precisione statica considerando *segnali con forma standard* (canonica).

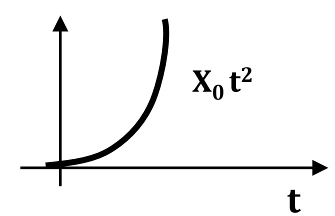
Ingresso a gradino $x(t) = X_0$ $X(s) = \dfrac{X_0}{s}$



Ingresso a rampa $x(t) = X_0 \cdot t$ $X(s) = \dfrac{X_0}{s^2}$



Ingresso a parabola $x(t) = X_0 \cdot t^2$ $X(s) = \dfrac{2 \cdot X_0}{s^3}$



$$e_r = \lim_{s=0} s \cdot \frac{X(s)}{1+L(s)}$$

SISTEMA TIPO 0

n = 0   **Guadagno d'anello:** $L(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$

Calcolo dell'ERRORE a regime:

Ingresso a gradino
Errore di posizione

$$e_r = \lim_{s=0} s \cdot \frac{\frac{X_0}{s}}{1+L(s)} = \frac{X_0}{1+\lim_{s=0}\frac{N(s)}{D(s)}} = \boxed{\frac{X_0}{1+L_{ST}}}$$

Ingresso a rampa
Errore di velocità

$$e_r = \lim_{s=0} s \cdot \frac{\frac{X_0}{s^2}}{1+L(s)} = \lim_{s=0} \frac{X_0}{s+s\cdot L(s)} = \infty$$

Ingresso a parabola
Errore di accelerazione

$$e_r = \lim_{s=0} s \cdot \frac{\frac{2\cdot X_0}{s^3}}{1+L(s)} = \lim_{s=0} \frac{2\cdot X_0}{s^2+s^2\cdot L(s)} = \infty$$

SISTEMA TIPO 0

Errore assoluto sull'uscita del sistema si ricava dividendo quello sul nodo di confronto e_r per il guadagno statico della fdt di retroazione H_0:

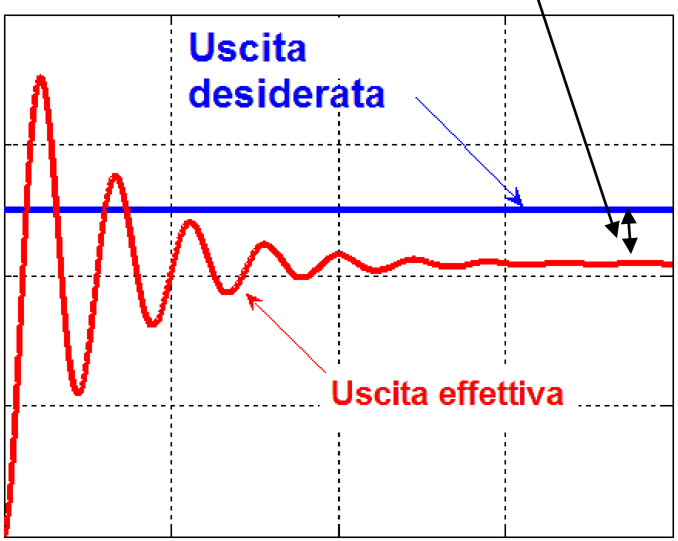
$$\Delta y_r = \frac{e_r}{H_0}$$

Ingresso a gradino

Errore di posizione

Errore assoluto sull'uscita del sistema

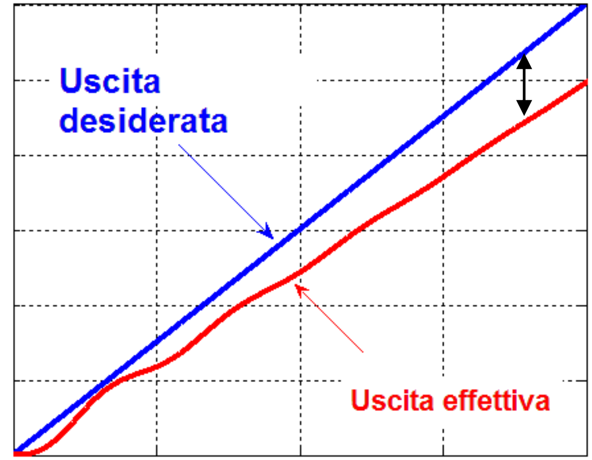
$$\Delta y_r = \frac{X_0}{(1 + L_{ST}) \cdot H_0}$$



Ingresso a rampa

Errore di velocità

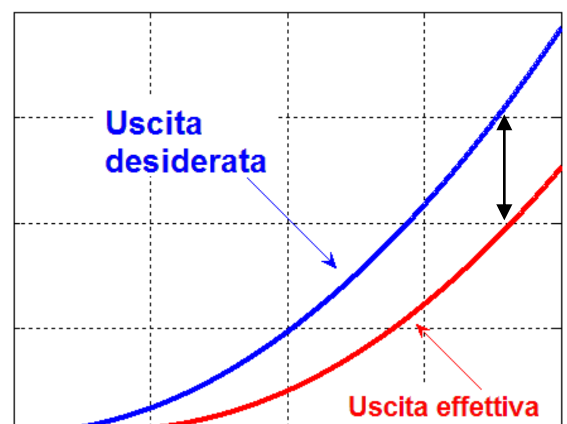
∞



Ingresso a parabola

Errore di accelerazione

∞



$$e_r = \lim_{s=0} s \cdot \frac{X(s)}{1+L(s)}$$

SISTEMA TIPO 1

n = 1 **Guadagno d'anello:** $$L(s) = \frac{1}{s}\frac{N(s)}{D(s)}$$

Calcolo dell'ERRORE

Ingresso a gradino
Errore di posizione

$$e_r = \lim_{s=0} s \cdot \frac{\frac{X_0}{s}}{1+L(s)} = \frac{X_0}{1+\lim\limits_{s=0}\frac{1}{s}\frac{N(s)}{D(s)}} = 0$$

Ingresso a rampa
Errore di velocità

$$e_r = \lim_{s=0} s \cdot \frac{\frac{X_0}{s^2}}{1+L(s)} = \lim_{s=0} \frac{X_0}{s + s\cdot\frac{N(s)}{s\cdot D(s)}} = \boxed{\frac{X_0}{L_{ST}}}$$

Ingresso a parabola
Errore di accelerazione

$$e_r = \lim_{s=0} s \cdot \frac{\frac{2\cdot X_0}{s^3}}{1+L(s)} = \lim_{s=0} \frac{X_0}{s^2 + s^2\frac{1}{s}\frac{N(s)}{D(s)}} = \infty$$

SISTEMA TIPO 1

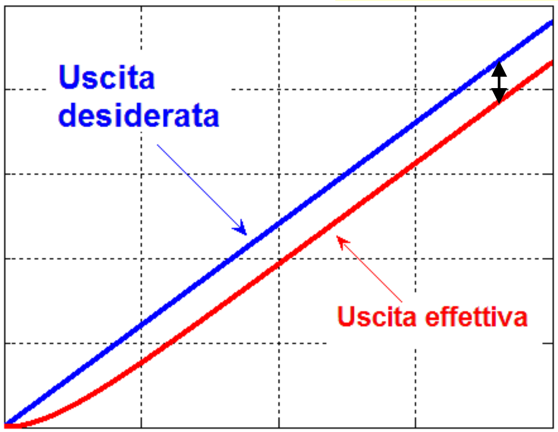
Errore assoluto sull'uscita del sistema si ricava dividendo quello sul nodo di confronto e_r per il guadagno statico della fdt di retroazione H_0:

$$\Delta y_r = \frac{e_r}{H_0}$$

Ingresso a rampa
Errore di velocità

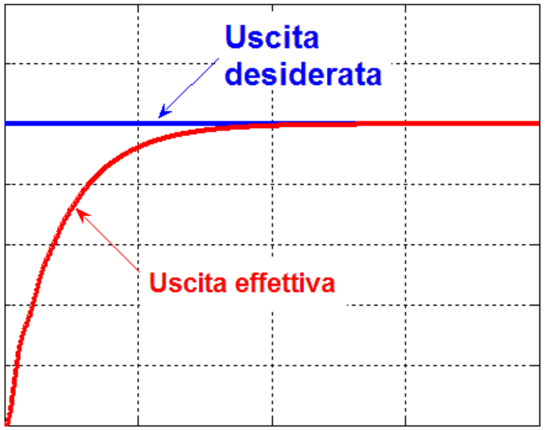
Errore assoluto sull'uscita del sistema

$$\Delta y_r = \frac{X_0}{L_{ST} \cdot H_0}$$



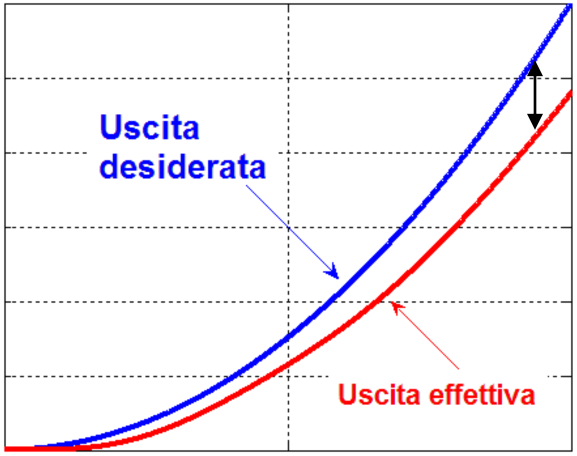
Ingresso a gradino
Errore di posizione

$$0$$



Ingresso a parabola
Errore di accelerazione

$$\infty$$



SISTEMA TIPO 2

n = 2　　**Guadagno d'anello:**

$$L(s) = \frac{1}{s^2}\frac{N(s)}{D(s)}$$

Calcolo dell'ERRORE

Ingresso a gradino
Errore di posizione

$$e_r = \lim_{s=0} s \cdot \frac{\frac{X_0}{s}}{1+L(s)} = \frac{X_0}{1+\lim\limits_{s=0}\frac{1}{s^2}\frac{N(s)}{D(s)}} = 0$$

Ingresso a rampa
Errore di velocità

$$e_r = \lim_{s=0} s \cdot \frac{\frac{X_0}{s^2}}{1+L(s)} = \lim_{s=0}\frac{X_0}{s+s\frac{1}{s^2}\frac{N(s)}{D(s)}} = 0$$

Ingresso a parabola
Errore di accelerazione

$$e_r = \lim_{s=0} s \cdot \frac{\frac{2\cdot X_0}{s^3}}{1+L(s)} = \lim_{s=0}\frac{X_0}{s^2+s^2\frac{1}{s^2}\frac{N(s)}{D(s)}} = \boxed{\frac{2\cdot X_0}{L_{ST}}}$$

SISTEMA TIPO 2

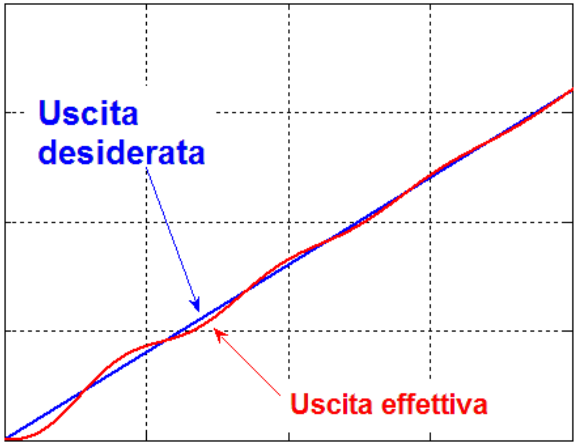
Errore assoluto sull'uscita del sistema si ricava dividendo quello sul nodo di confronto e_r per il guadagno statico della fdt di retroazione H_0:

$$\Delta y_r = \frac{e_r}{H_0}$$

Ingresso a rampa

Errore di velocità

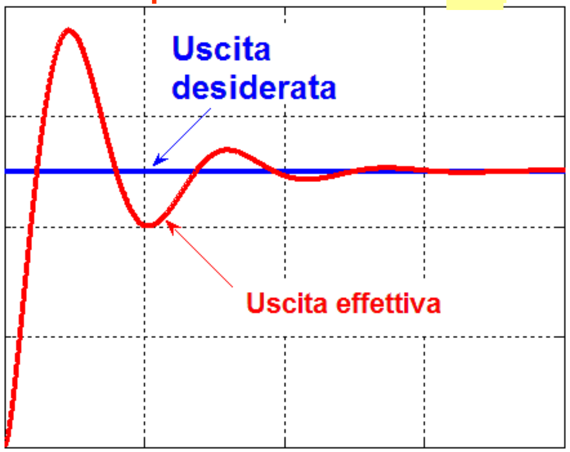
$$0$$



Ingresso a gradino

Errore di posizione

$$0$$



Ingresso a parabola

Errore di accelerazione

Errore assoluto sull'uscita del sistema

$$\Delta y_r = \frac{2 \cdot X_0}{L_{ST} \cdot H_0}$$

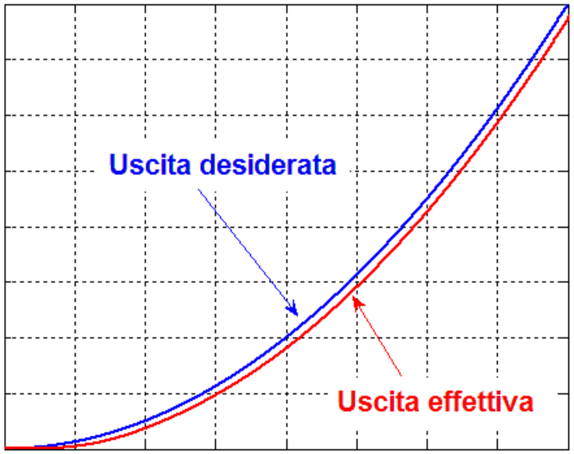
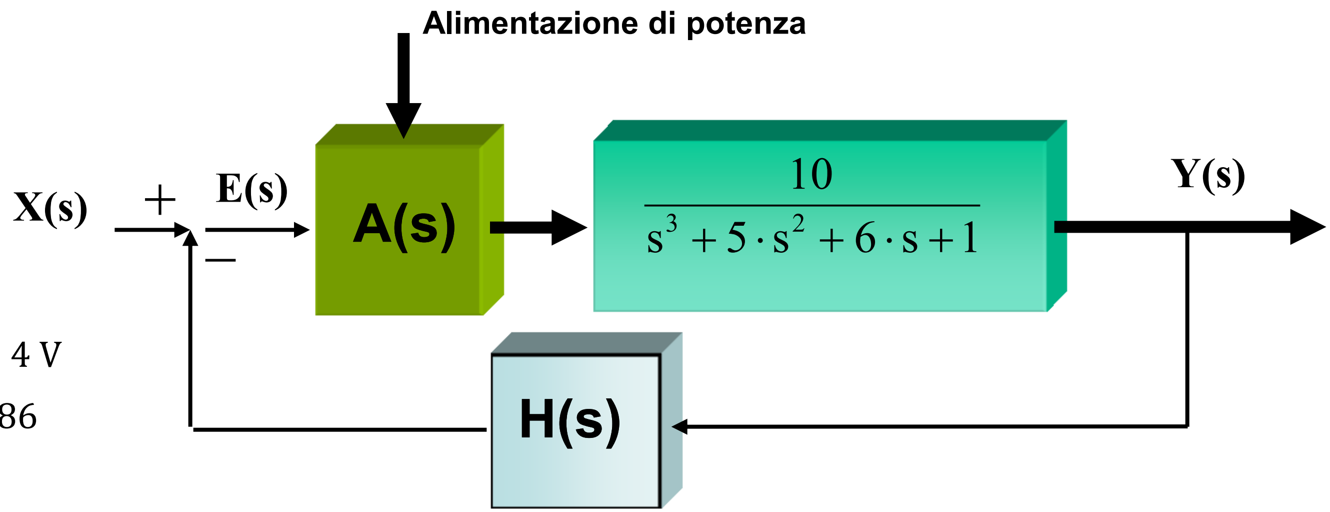


TABELLA RIASSUNTIVA

NB: le espressioni che appaiono in tabella si riferiscono ai valori assoluti calcolati rispetto al segnale errore e_r :

INGRESSO		TIPO DI SISTEMA		
x(t)	**X(s)**	**0**	**1**	**2**
Gradino X_0 *Errore di posizione*	$\frac{X_0}{s}$	$\boxed{\frac{X_0}{1+L_{ST}}}$	0	0
Rampa $X_0 \cdot t$ *Errore di velocità*	$\frac{X_0}{s^2}$	∞	$\boxed{\frac{X_0}{L_{ST}}}$	0
Parabola $X_0 \cdot t^2$ *Errore di accelerazione*	$\frac{2 \cdot X_0}{s^3}$	∞	∞	$\boxed{\frac{2 \cdot X_0}{L_{ST}}}$

ESERCIZIO *Traccia*



<u>Dati</u>:

$x(t) = 4$ V

$Y_{ID} = 86$

1) Dimensionare il ramo di retroazione

2) Calcolare il guadagno A_0 del convertitore di potenza in modo da avere un errore a regime $\leq$ al 5%

3) Verificare la stabilità del sistema ricorrendo al metodo di Routh, nell'ipotesi che il convertitore sia caratterizzato da una risposta istantanea.

ESERCIZIO Soluzione

1) Dimensionare il ramo di retroazione

Si calcola il valore statico di H(s):

$$H_0 = \frac{X_{RIF}}{Y_{ID}} = \frac{4}{86} = 0.0465$$

2) Calcolare il guadagno statico A_0 del convertitore di potenza in modo da avere un errore a regime $\leq$ al 5%

L'incognita A_0 è nascosta all'interno dell'espressione dell'errore a regime e precisamente nella costante L_{ST}.
Il sistema è di tipo 0, l'ingresso è un gradino, dalla specifica risulta

$$e_r = \boxed{\frac{X_0}{1 + L_{ST}} \leq (e_r)_{MAX}}$$

La costante L_{ST} risulta:

$$L_{ST} = \lim_{s=0} L'(s) = A_0 \cdot 10 \cdot H_0 = A_0 \cdot 0.465$$

mentre l'errore massimo ammissibile è :

$$(e_r)_{MAX} = 0.05 \cdot 4 = 0.2$$

Per il calcolo di A_0 occorre dunque risolvere la disequazione:

$$\frac{4}{1 + A_0 \cdot 0.465} \leq 0.2$$

La cui soluzione conduce a $\boxed{A_0 \geq 40.9}$

3) Verificare la stabilità del sistema ricorrendo al metodo di Routh

Occorre valutare il comportamento dinamico del ramo di retroazione e del convertitore di potenza.
Si ipotizza che siano entrambi privi di fenomeni dinamici, cioè che presentino una risposta immediata.

- $H(s) = H_0$
- $A(s) = A_0$

Si deve calcolare l'equazione caratteristica dell'intero sistema, ma prima occorre assegnare un valore al guadagno A_0 del convertitore:

Ipotesi $A_0 = 41$.

L'equazione risulta: $\boxed{s^3 + 5 \cdot s^2 + 6 \cdot s + 20.1 = 0}$

Tabella di Routh:

1	**6**
5	**20.1**
1.98	
20.1	

Non essendoci variazioni di segno nella prima colonna, il sistema risulta stabile.

Infatti le soluzioni risultano:

$S_1 = -4.639$
$S_2 = -0.181 + j\,2.072$
$S_3 = -0.181 - j\,2.072$

Esercizio

IPOTESI: Precisione dell'1%

Ripetere i calcoli relativi ai punti 2) e 3)

SOLUZIONE

$\boxed{A_0 \geq 212.9}$

Ipotesi: $A_0 = 213$

Calcolo ***equazione caratteristica:*** $\boxed{s^3 + 5 \cdot s^2 + 6 \cdot s + 100 = 0}$

Tabella di Routh:

1	**6**
5	**100**
-14	
100	

Essendoci variazioni di segno nella prima colonna, il sistema risulta instabile.

Soluzioni dell'equazione caratteristica:

$S_1 = -6.465$

$S_2 = 0.732 + j\,3.864$

$S_3 = 0.732 - j\,3.864$

Esercizio Calcolare la precisione massima consentita dal sistema

SOLUZIONE

Per il calcolo si parte dal vincolo della stabilità: con la tabella di Routh si individua il valore massimo per A_0, con tale valore si calcola l'errore assoluto e infine quello percentuale.

Calcolo equazione caratteristica: $\boxed{s^3 + 5 \cdot s^2 + 6 \cdot s + 1 + A_0 \cdot 0.465 = 0}$

Tabella di Routh:

1	**6**
5	**$1 + A_0\ 0.465$**
$5.8 - A_0\ 0.093$	
$1 + A_0\ 0.465$	

Dal calcolo risulta: $A_0 \leq 62.36$

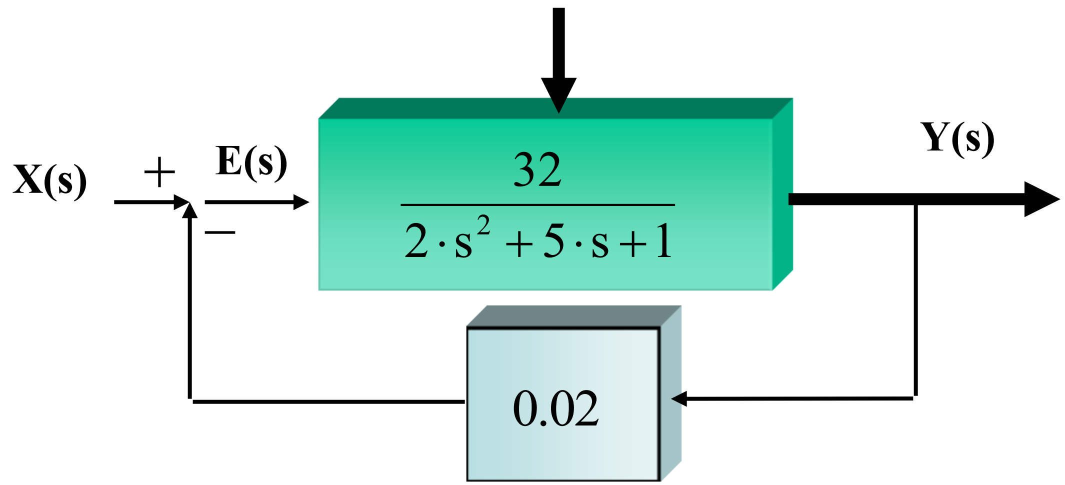
Ipotesi: $A_0 = 62$

L'errore a regime minimo per il sistema risulta pari al

3.35%.

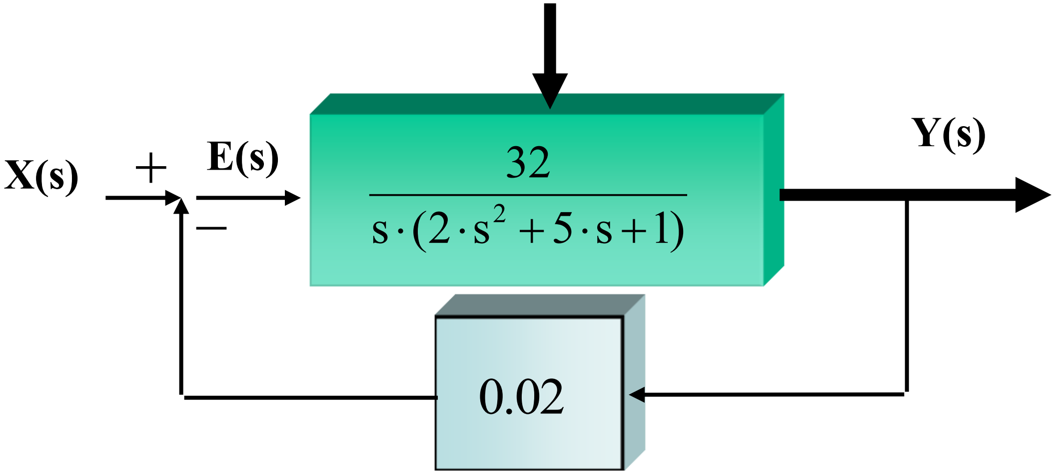
NB: E' possibile aumentare la precisione e anche migliorare il comportamento in transitorio introducendo la regolazione PID.

ESERCIZIO da svolgere **1**



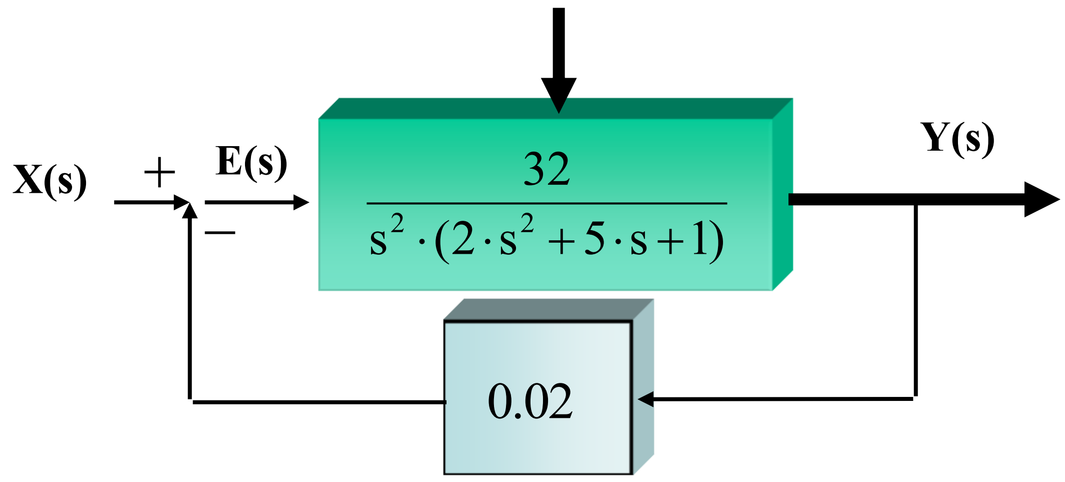
- Calcolare l'errore di posizione rispetto ad un ingresso di 4 V
- Verificare la stabilità del sistema (Metodo di Routh)

ESERCIZIO da svolgere 2



- Calcolare l'errore di posizione rispetto ad un ingresso di 4 V
- Calcolare l'errore di velocità rispetto all'ingresso x(t) = 0.12 t
- Verificare la stabilità del sistema (Metodo di Routh)

ESERCIZIO da svolgere 3



- Calcolare l'errore di posizione rispetto ad un ingresso di 4 V
- Calcolare l'errore di velocità rispetto all'ingresso x(t) = 0.12 t
- Calcolare l'errore di accelerazione rispetto all' ingresso $x(t) = 0.03\ t^2$
- Verificare la stabilità del sistema (Metodo di Routh)

Esercizi *Soluzioni*

ESERCIZIO 1

- Errore di posizione: $e_r = 2.44$ (e_r% = 61)
- Verifica di stabilità: STABILE.

ESERCIZIO 2

- Errore di posizione: 0 (e_r% = 0)
- Errore di velocità: 0.19
- Verifica di stabilità: STABILE.

ESERCIZIO 2

- Errore di posizione: 0 (e_r% = 0)
- Errore di velocità: 0
- Errore di accelerazione: 0.094
- Verifica di stabilità: INSTABILE.