INTRODUZIONE

Il concetto di **contenuto armonico** di una funzione è connesso alla possibilità di rappresentarla come *somma di termini trigonometrici* (seno, coseno).

Lo sviluppo della scienza moderna pose seri problemi matematici.

> "***Poiché la scienza era giunta a dipendere pesantemente dalla****, e quasi a essere subordinata alla,* ***matematica****,* ***furono gli scienziati che estesero il dominio e le tecniche della matematica*** *e la molteplicità dei problemi forniti dalla scienza diede ai matematici numerose e importanti direzioni di sviluppo per la loro attività creativa*"

(Morris Kline, *Storia del pensiero matematico*)

Nei primi decenni del '700 Brook **Taylor** rappresentò le funzioni come *somma di termini polinomiali*:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

NB: tuttavia già MacLaurin aveva pubblicato qualcosa.

Verso la metà del '700, gli studi:

- sul *movimento degli astri*
- sulle *corde vibranti* (esempio: il violino)

stimolarono il ricorso alle ***serie trigonometriche***.

Lo studio della musica, cioè la correlazione dei vari toni, portò nei primi decenni del '700 a formulare una *teoria dell'armonia*.

Taylor scoprì che la legge di vibrazione delle corde è sinusoidale.

Il singolo tono (sinusoide) fu denominato ***armonica***.

Lo studio delle corde vibranti vide i grandi matematici del tempo in disaccordo: Bernoulli, Eulero, D'Alambert, …

Nel 1807 Jean Baptiste **Fourier**, fisico e matematico francese, pubblicò uno scritto *Sulla Propagazione del Calore*, in cui espose la possibilità di rappresentare una funzione come somma di sinusoidi.

Armonica

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t - \varphi_n) = A_o + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin(n \cdot \omega_0 + \varphi_n) \qquad \omega_0 = \frac{2 \cdot \pi}{T_0}$$

NB: Fourier fu consigliere scientifico di Napoleone durante la campagna d'Egitto; tornato in Francia, fu nominato a presiedere la costruzione di grandi opere (es: grandi strade). In questo periodo Fourier lavorò ad una teoria del calore, e pubblicò i risultati.

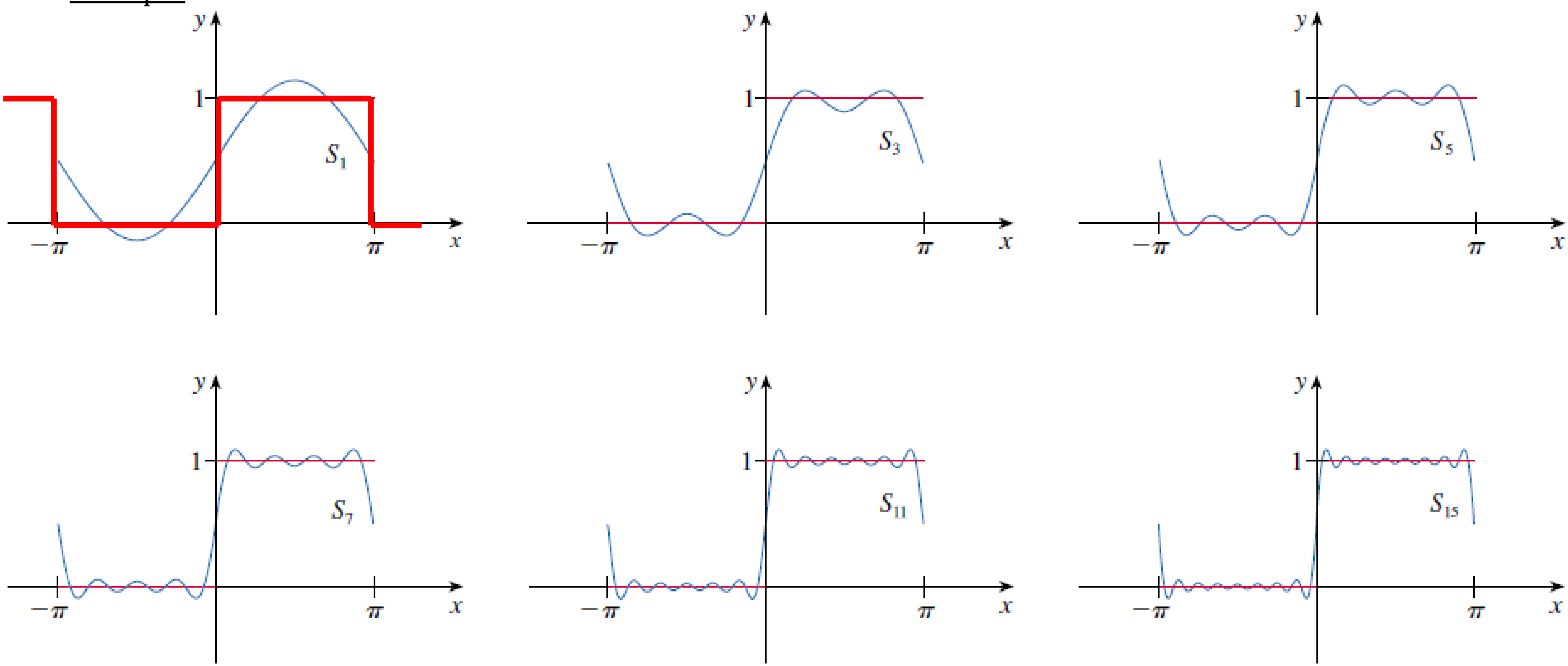
Data una funzione f(x), essa poteva quindi essere approssimata sia da una ***serie di Taylor*** che da una ***serie di Fourier.***

Vi era, tuttavia, qualche differenza tra la *serie di Taylor* e quella di Fourier:

> solo *funzioni differenziabili* possono essere scomponibili (rappresentabili, approssimabili) con serie di ***Taylor***, mentre le serie di ***Fourier*** riuscivano a rappresentare persino *funzioni discontinue*.

La ***serie di Fourier*** permette di scomporre una funzione, anche discontinua, purché periodica, in una somma infinita di termini trigonometrici (continui).

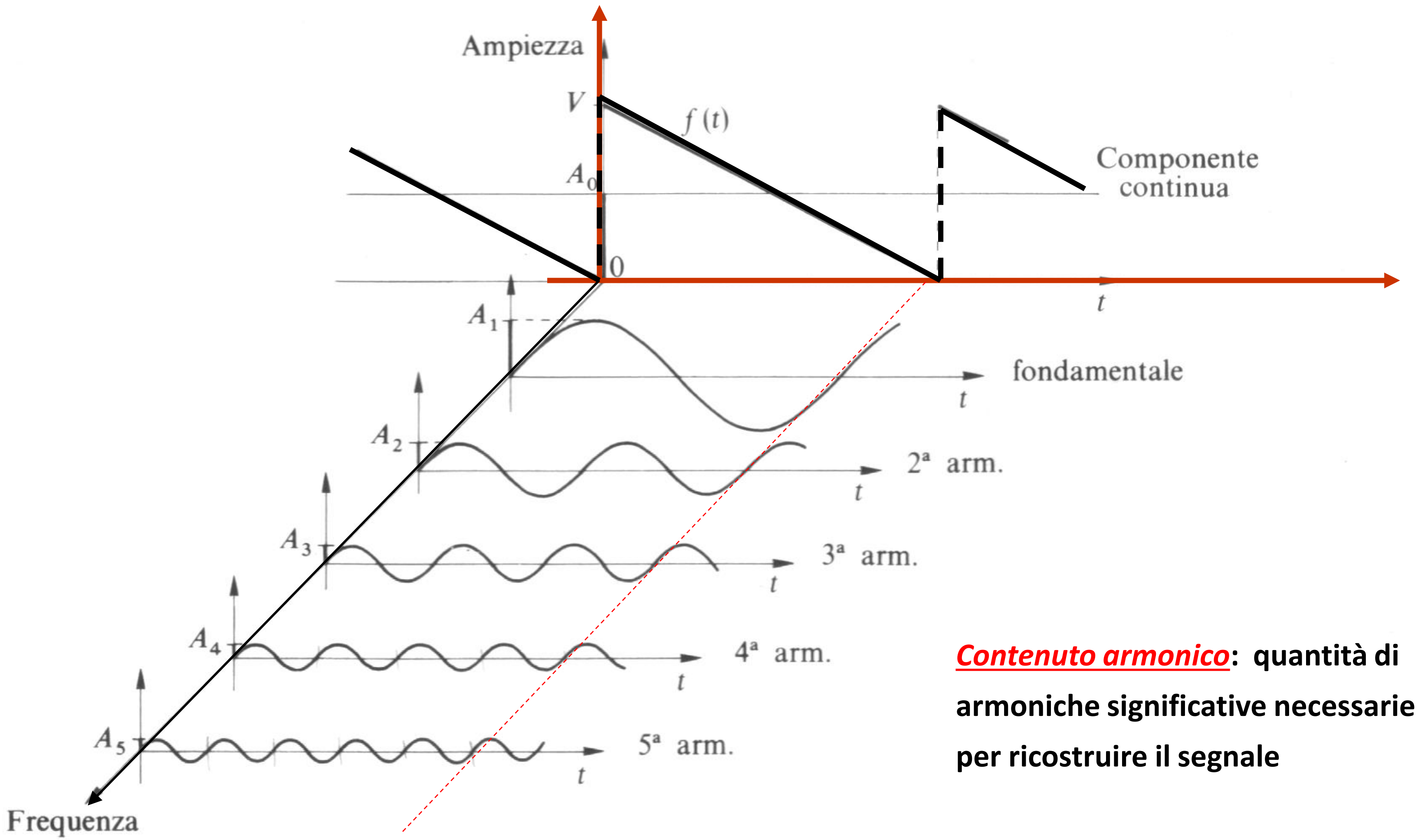
Esempio:



NB: La possibilità di descrivere una discontinuità come somma infinita di termini continui (serie trigonometrica) fu rifiutata da eminenti matematici (es: Cauchy). Ma col tempo la serie di Fourier fu accettata.

Contenuto armonico di un segnale

<u>Segnale periodico</u>: **è sempre scomponibile come *somma di infinite sinusoidi* (Teorema di Fourier)**



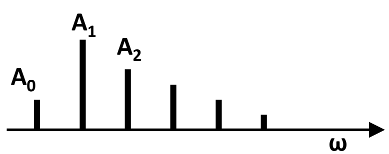
***<u>Contenuto armonico</u>*: quantità di armoniche significative necessarie per ricostruire il segnale**

Armonica

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t - \varphi_n) \qquad \omega_0 = \frac{2 \cdot \pi}{T_0}$$

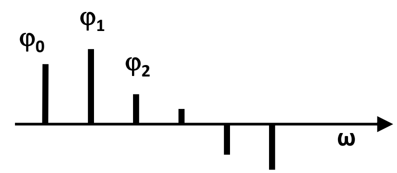
Spettro delle ampiezze A_n

Distribuzione delle ampiezze lungo l'asse delle pulsazioni



Spettro delle fasi φ_n

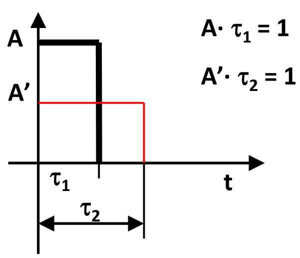
Distribuzione delle ampiezze lungo l'asse delle pulsazioni



__NB__: **spettri discreti**

__**Segnale non periodico**__: una funzione di area limitata è scomponibile in *somma di infinite sinusoidi* con pulsazioni infinitamente vicine

Esempio: *impulso unitario*



Spettro delle ampiezze continuo