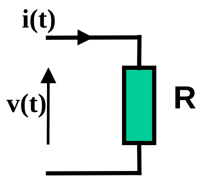
COMPONENTI E SISTEMI ELETTRICI

Differenza di potenziale:	**Tensione elettrica**	**V**
Flusso:	**Corrente elettrica**	**I**
Quantità:	**Carica elettrica**	**Q**

RESISTORE

DEFINIZIONE: componente la cui proprietà principale è quella di opporsi alla formazione della corrente elettrica, quando ai suoi terminali è applicata una tensione elettrica.

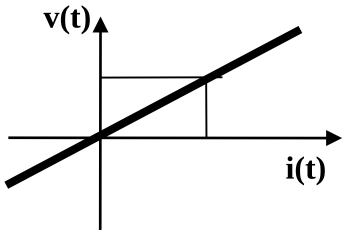
Il suo parametro principale è quindi la resistenza:



$$\text{Resistenza} = \frac{\text{Tensione}}{\text{Corrente}}$$

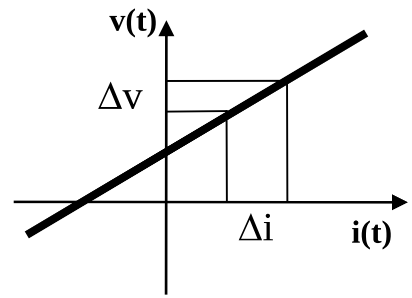
Legge di Ohm, 1827: $R = \dfrac{v(t)}{i(t)}$

Se la caratteristica è lineare, risulta:



$$R = \frac{v(t)}{i(t)} = \frac{\Delta v}{\Delta i} = \text{Costante}$$

Se invece è una retta non passante per l'origine:

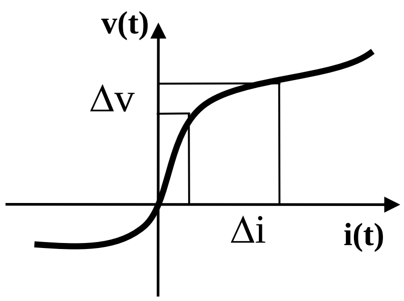


NB: il rapporto $R = \frac{v(t)}{i(t)}$ **non è più costante**

Invece: $r_d = \frac{\Delta v}{\Delta i} = \text{Costante}$

In questo caso si definisce una _resistenza differenziale_ r_d

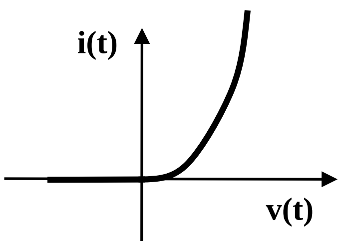
Se il bipolo presenta una caratteristica Non Lineare:



La *resistenza differenziale* risulta:

$$r_d = \frac{\Delta v}{\Delta i} = \text{Variabile}$$

Esempio: DIODO



Dopo l'accensione, r_d diminuisce molto velocemente.

La resistenza si misura in Ohm:

Un resistore presenta una resistenza di 1 Ω quando, sottoposto alla tensione di 1 V, permette lo scorrimento di una corrente di 1 A

$$1\Omega = \frac{1V}{1A}$$

POTENZA DISSIPATA

Nei resistori non si accumula energia. Al passaggio della corrente, al loro interno avviene una trasformazione energetica, in cui parte della potenza elettrica transitante è convertita in potenza termica: il conduttore si scalda.

Il fenomeno fu studiato fin dalle origini dei circuiti elettrici, e nel 1837 J. P. JOULE lo quantificò con la seguente formula:

$$p(t) = R \cdot i(t)^2$$

Il riscaldamento di un conduttore per effetto del passaggio della corrente elettrica è noto come *effetto Joule*.

Ai tempi di Joule il calore era misurato in calorie (quantità di calore da fornire a 1 kg di acqua per portare la sua temperatura da 14.5 a 15.5 °C).

Nel 1842 il fisico olandese J. R. Mayer pubblicò un breve articolo in cui per primo sostenne che il calore è una forma di energia.

Joule si mosse nella stessa direzione , fece degli esperimenti e nel 1843 ne pubblicò i risultati: *il calore non è un'essenza della materia, bensì una manifestazione del lavoro meccanico.*

Per quantificare l'equivalenza Joule organizzò il famoso esperimento del mulinello. Nel 1850 pubblicò una memoria in cui e forniva una relazione quantitativa dell'equivalenza.

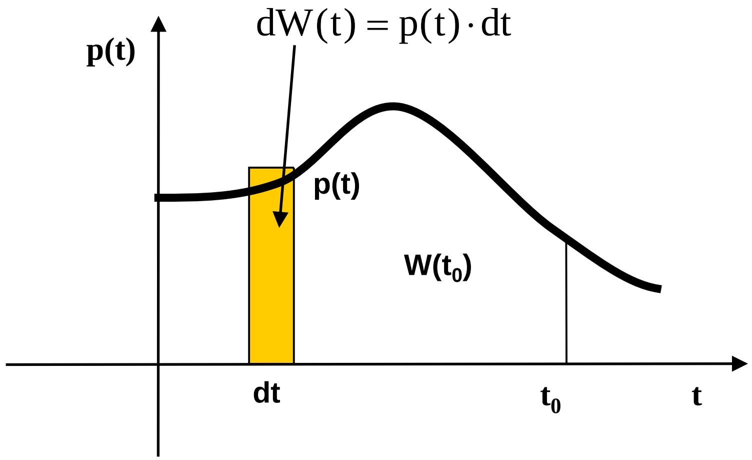
Oggi, con misurazioni più precise, vale la relazione: 1 cal = 4.187 J, *equivalente meccanico del calore*

1 J = 0.239 cal, *equivalente termico del lavoro*

L'energia è legata alla potenza secondo la seguente relazione:

Energia = Potenza x Tempo [J] = [W] [s]

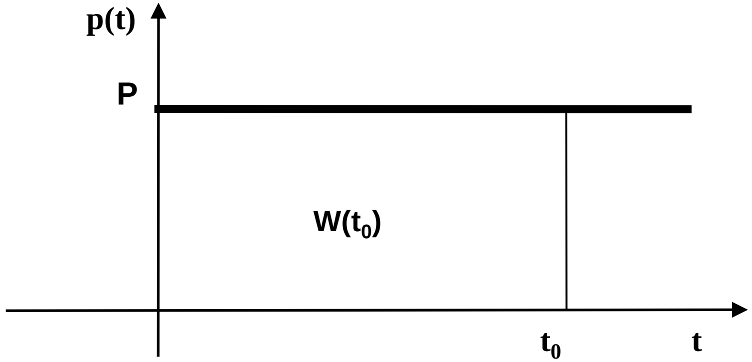
Se si costruisce un grafico dell'evoluzione della potenza nel tempo, l'energia risulta essere l'area sottesa dalla curva della potenza:



Per il calcolo di quest'area si può ricorrere al calcolo numerico:

si divide l'area in tanti rettangolini di altezza p(t) e base dt, e si sommano tutte le loro aree.

Caso particolare: **<u>potenza costante</u>**



In questo caso l'area corrisponde a quella di un rettangolo:

$$W(t_0) = P \cdot t_0$$

ESERCIZI

Un resistore alimentato con 230 V per 30 min, dissipa 1500 W. Calcolare I, R, Q.

$$I = \frac{P}{V} = \frac{1500}{230} = 6.52 \quad A$$

$$R = \frac{V^2}{P} = \frac{230^2}{1500} = 35.3 \quad \Omega$$

$$W = P \cdot \Delta t = 1500 \cdot 30 \cdot 60 = 2.7 \cdot 10^6 \quad J$$

$$Q = W \cdot 0.239 = 645 \quad kcal = 645 \quad Cal$$

Un resistore alimentato con 12 V per 20 min, dissipa 170 cal. Calcolare R.

$$Q = 0.239 \cdot \frac{V^2}{R} \cdot \Delta t$$

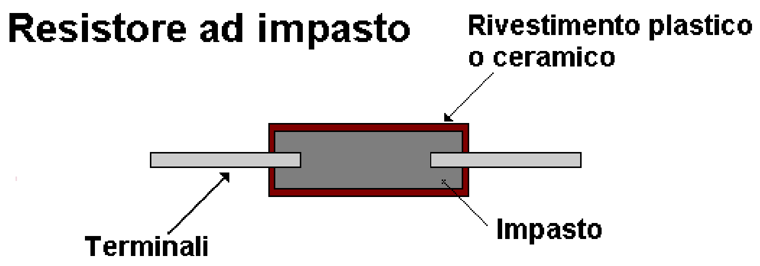
$$R = 0.239 \cdot \frac{V^2}{Q} \cdot \Delta t = 0.239 \cdot \frac{12^2}{170} \cdot 1200 = 243 \quad \Omega$$

Un resistore di 1.8 Ω è alimentato con 48 V. Calcolare per quanto tempo deve essere allimentato al fine di sviluppare una quantità di calore pari a 200 cal.

$$\Delta t = \frac{R \cdot Q}{0.239 \cdot V^2} = \frac{1.8 \cdot 200}{0.239 \cdot 48^2} = 0.654 \quad s$$

TECNOLOGIE COSTRUTTIVE

Resistori a impasto



La resistenza è ottenuta per mezzo di una miscela di materiali isolanti e coduttori.

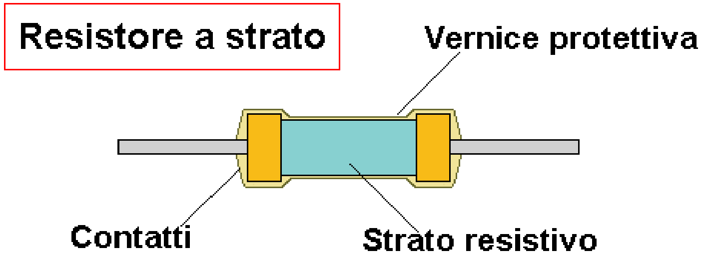
Impasto a grafite

Per i resistori con impasto a grafite:

Caratteristiche:

- resistenza diminuisce con l'aumento della dissipazione
- scarsa stabilità della resistenza con l'invecchiamento
- resistenza da ~ centinaio di Ω a ~ centinaio di MΩ
- potenza dissipabile: 1/4, 1/2, 1, 2 W
- tolleranza dal 5% al 20%
- bassissima induttanza
- basso costo.

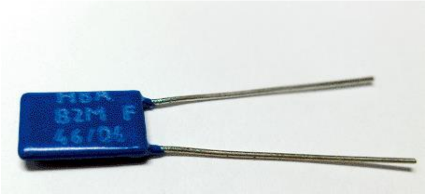
Resistori a <u>strato</u> (a film)



La resistenza è ottenuta per mezzo di una sottile pellicola resistiva avvolta su un supporto isolante. Sulla pellicola viene praticato un solco a spirale lungo tutto il cilindro.

A <u>strato di carbone</u>: resistenza da 1 Ω a 20 MΩ; tolleranza da 5% a 1%; potenza da 1/8 a 2 W; da non usare ad alta temperatura.

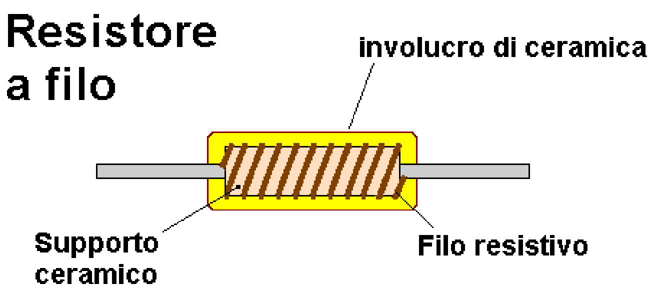
A <u>strato metallico</u>: resistenza max 1 MΩ; tolleranza da 1% a 0.1% per resistori normali, da 0.1% a 0.001% per resistori ad alta precisione; potenza da 1/8 a 2 W; maggiore stabilità della resistenza all'aumentare della temperatura.



A <u>strato ceramico</u> (Cermet): resistenza tra 10 kΩ e un 1 TΩ; tolleranza 1% ; potenza fino a 2 W.

Adatti per applicazioni in alta tensione.

Resistori a <u>filo</u>



La resistenza è ottenuta per mezzo dell'avvolgimento di un filo metallico avvolto su un cilindro isolante (max 100 kΩ):

- **costantana (Ni-Cu), per resistori ad alta precisione**
- **cromel (Ni-Cr), per resistori di alta potenza (> 5 W, fino ~ centinaio di W).**

NB: cromel utilizzato come elemento riscaldante nei forni elettrici (leghe Ni-Cr + Fe sono più economiche, ma anche più soggette a corrosione).

Sono caratterizzati da una buona stabilità nel tempo.

Possono lavorare ad alte temperature: 250 – 300 °C.

Per ridurre l'effetto induttivo si realizza un avvolgimento bifilare (avvolgimento *Ayrton-Perry*) in modo da annullare il flusso magnetico. Massima frequenza di utilizzo 100 kHz.

<u>Esempio</u>: resistore di 2.2 kΩ ± 5%, 5 W

L'informazione sulla tolleranza deriva dal simbolo J, secondo la seguente tabella:

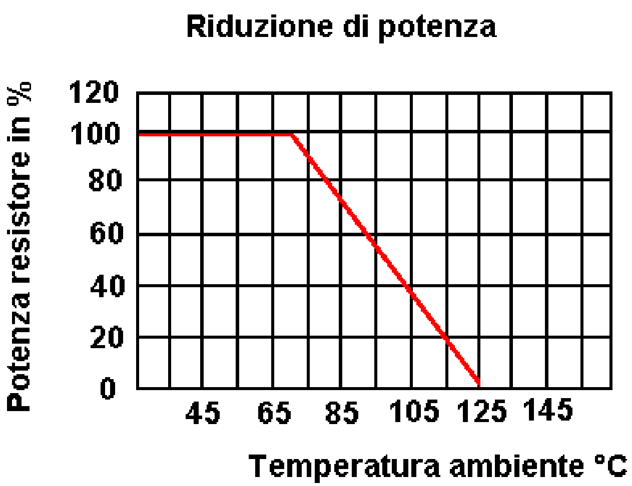
M	20 %
K	10
J	5
G	2
F	1
D	0.5
C	0.25
B	0.1

DERATING DELLA POTENZA

La potenza nominale di un resistore è riferita a una data temperatura ambiente. Se questa è maggiore, il resistore ha una maggiore difficoltà di raffreddamento, per cui occorre diminuire l'effetto Joule che in esso ha luogo.

Ciò comporta una riduzione della corrente che si può far fluire nel resistore.

Per consentire il calcolo i costruttori forniscono un grafico di declassamento della potenza del resistore in funzione della temperatura ambiente:



Esempio: Resistore da 330 Ω, e 0.5 W a 70 °C

Se ne deduce una I_{MAX}:

$$I_{MAX} = \sqrt{\frac{0.5}{330}} = 38.9 \quad mA$$

Tuttavia il resistore è inserito in un circuito la cui temperatura ambiente raggiunge i 105 °C. Dal grafico del costruttore si deduce che l'effetto Joule sopportabile scende al 38% del valore nominale: 0.5·0.38 = 0.19 W.

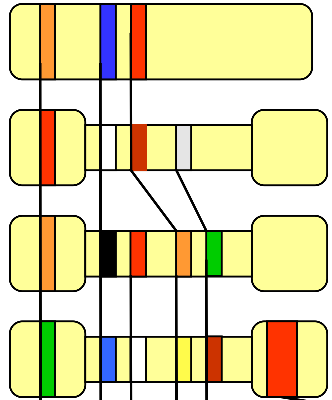
La corrente massima risulta allora:

$$I_{MAX} = \sqrt{\frac{0.19}{330}} = 24 \quad mA$$

Codice colori

Resistori normali: 3 bande, 4 bande

Resistori di alta precisione: 5 bande, 6 bande



Tolleranza del +/- 20%

Rosso Bianco Marrone Argento

$2\ 9 \cdot 10\ \Omega = 290\ \Omega \pm 10\ \%$

Arancio Nero Rosso Arancio Verde

$3\ 0\ 2 \cdot 1\ k\Omega = 302\ k\Omega \pm 0.5\ \%$

	Cifre significative			Fattore moltiplicativo		Tolleranza	Coefficiente di temperatura
Argento				10mΩ	10^{-2}	10%	
Oro				100mΩ	10^{-1}	5%	
Nero	0	0	0	1 Ω	10^{0}		
Marrone	1	1	1	10 Ω	10^{1}	1%	100ppm/K
Rosso	2	2	2	100 Ω	10^{2}	2%	50ppm/K
Arancio	3	3	3	1kΩ	10^{3}		15ppm/K
Giallo	4	4	4	10kΩ	10^{4}		25ppm/K
Verde	5	5	5	100kΩ	10^{5}	0.5%	
Blu	6	6	6	1MΩ	10^{6}	0.25%	
Viola	7	7	7	10MΩ	10^{7}	0.1%	
Grigio	8	8	8				
Giallo	9	9	9				

CONDENSATORE

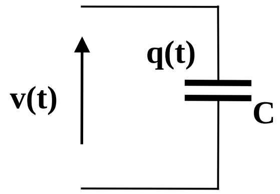
Nota Storica: l'invenzione del condensatore è legata al desiderio di accumulare elettricità e portarla a spasso.

1746: bottiglia di Leyda.

1780: A. Volta costruì il primo condensatore piano.

DEFINIZIONE: componente in grado di accumulare *carica elettrica*.

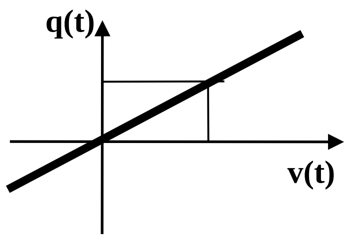
Il suo parametro principale è quindi la capacità, definita dalla *legge del condensatore:*



$$\text{Capacità} = \frac{\text{Carica}}{\text{Tensione}}$$

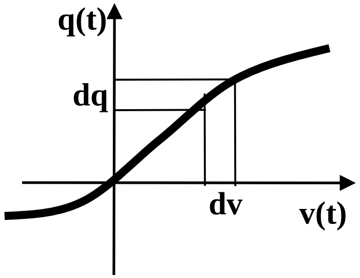
La capacità rappresenta quindi la carica elettrica accumulata per un volt di tensione. Si misura in Farad: $[F] = \frac{[C]}{[V]}$

Se la caratteristica è lineare:



$$C = \frac{q(t)}{v(t)} = \frac{\Delta q}{\Delta v} = \frac{dq}{dv} = \text{Cos tan te}$$

Se la caratteristica è Non Lineare:



Si definisce una *capacità differenziale*:

$$c_r = \frac{dq(t)}{dv(t)} = \text{Variabile}$$

La corrente elettrica che carica e scarica un condensatore è desumibile dalla legge del condensatore:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C\frac{dv(t)}{dt}$$

Osservazioni:

- **i(t) tanto maggiore quanto più velocemente varia v(t)**
- **pericoloso collegare il condensatore direttamente a un generatore di tensione (variazione istantanea della v_C(t))**

Accumulando carica elettrica, il condensatore accumula energia elettrostatica:

NB: sia la carica che la tensione sono variabili di stato.

$$W_E = \frac{1}{2}\cdot q(t)\cdot v(t) = \frac{1}{2}\cdot\frac{q(t)^2}{C} = \frac{1}{2}\cdot C\cdot v(t)^2$$

Condenstore piano

Nei condensatori piani la capacità ha una espressione semplice: $C = \varepsilon\cdot\frac{A}{d}$

con: **ε = costante dielettrica assoluta**

A = sezione delle armature

d = distanza tra le armature

$\varepsilon_0 = 8.85\cdot10^{-12}$ F/m

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

	ε_r	Rigidità dielettrica [kV/cm]
Aria secca	1.00059	30
Acqua pura	81.07	150
Mica	6 ÷ 8	500 - 1000
Vetro	6 ÷ 8	250 - 1000

ESERCIZI

Un condensatore accumula 0.06 C per volt di tensione ai suoi capi. Calcolare la capacità, la carica elettrica, e l'energia accumulata se sottoposto alla tensione costante di 17 V.

$$C = \frac{0.06}{1} = 0.06 \quad F$$

$$Q = C \cdot V = 0.06 \cdot 17 = 1.02 \quad C$$

$$W_E = \frac{1}{2} \cdot C \cdot V^2 = \frac{1}{2} \cdot 0.06 \cdot 17^2 = 8.67 \quad J$$

Calcolare la distanza cui devono stare due armature piane parallele di un condensatore in aria di area 20 cm², per presentare una capacità di 5 nF.

$$d = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{C} = 1 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{20 \cdot 10^{-4}}{5 \cdot 10^{-9}} = 3.54 \cdot 10^{-6} \ m = 3.54 \ \mu m$$

Un condensatore piano è realizzato con dielettrico la cui costante dielettrica relativa è 8. Le armature hanno un'area di 50 cm². Calcolare a quale distanza disporre le armature per consentire un accumulo di 7 mJ con tensione di 3.6 V.

$$C = \frac{2 \cdot W_E}{V^2} = \frac{2 \cdot 7 \cdot 10^{-3}}{3.6^2} = 1.08 \quad mF$$

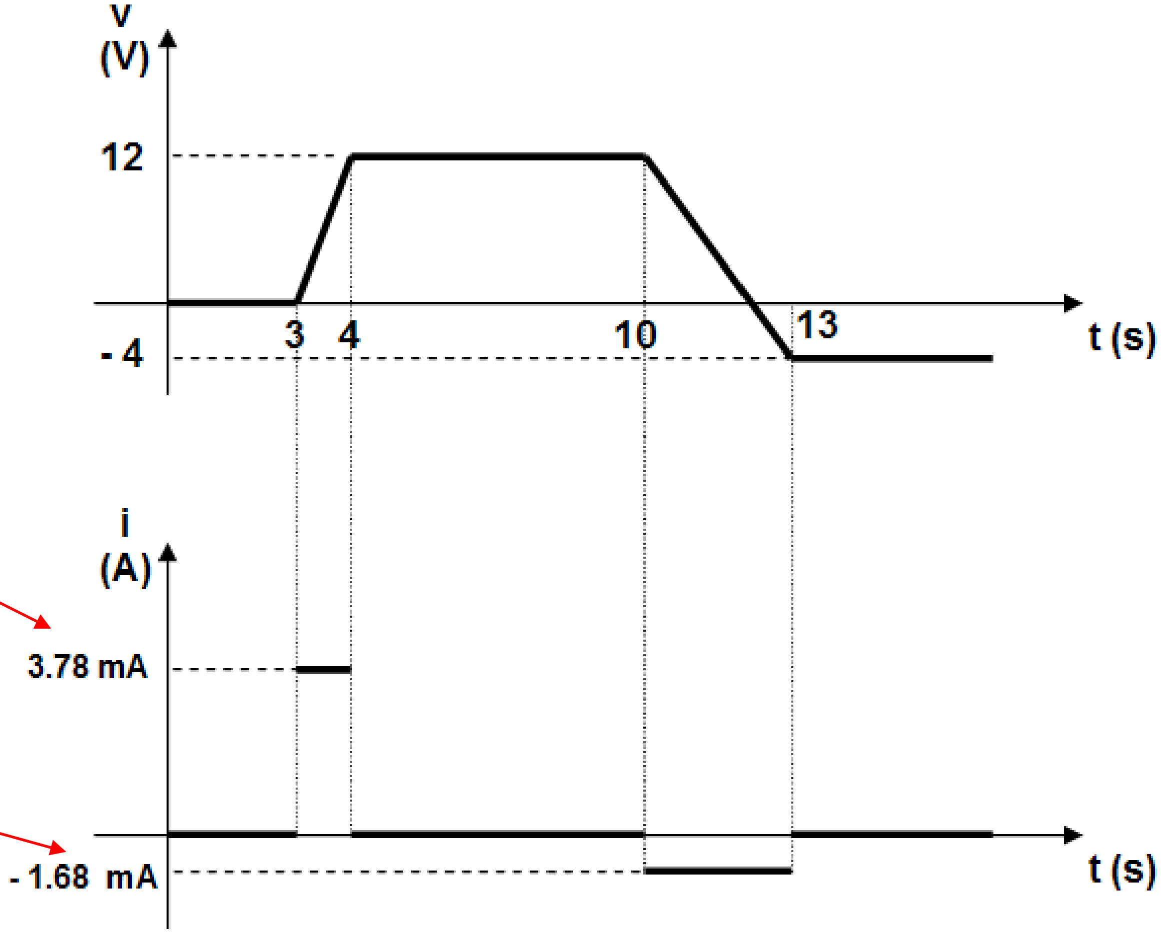
$$d = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{C} = 8 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{50 \cdot 10^{-4}}{1.08 \cdot 10^{-3}} = 3.28 \cdot 10^{-10} \quad m$$

ESEMPIO:

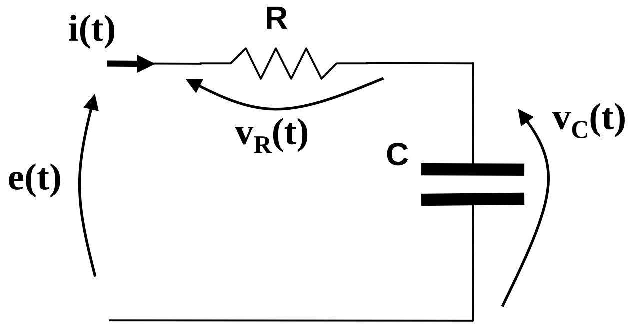
Un condensatore, con C = 315 μF, è alimentato con la tensione in grafico. Calcolare e disegnare l'andamento della corrente.

$$315 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{12-0}{4-3}$$

$$315 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{-4-12}{13-10}$$



CIRCUITO OHMICO - CAPACITIVO



Studiare il *comportamento* di un sistema equivale a esaminare come varia il suo stato in funzione degli ingressi, cioè come variano le sue variabili di stato.

Il modello matematico deve quindi legare le variabili di stato agli ingressi.

Il punto di partenza sono le leggi fisiche.

Il circuito è formato da due componenti, uno dei quali in grado di accumulare energia: il condensatore. Come variabile di stato si assume normalmente la tensione $v_C(t)$, e il circuito si considera alimentato mediante la tensione e(t).

La legge fisica che lega la $v_C(t)$ alla e(t) è la legge di Kirchhoff alla maglia:

$$e(t) - v_R(t) - v_C(t) = 0$$

$$e(t) - R \cdot i(t) - v_C(t) = 0$$

Le variabili presenti nel modello devono rappresentare ingressi e variabili di stato (o uscite). Nell'equazione di Kirchhoff occorre quindi scrivere i(t) in funzione di e(t) e/o $v_C(t)$:

Dalla legge del condensatore:

$$i(t) = C \cdot \frac{dv_c(t)}{dt}$$

Sostituendo, e dopo pochi passaggi:

$$R \cdot C \cdot \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = e(t)$$

Equazione differenziale

Osservazioni:

- **l'incognita, cioè $v_C(t)$, è una funzione; la soluzione quindi non è un numero, bensì una formula**
- **l'incognita compare con le sue variazioni nel tempo (per via della presenza dell'accumulatore di energia), e per questo l'equazione è detta differenziale**
- **l'esistenza di un solo serbatoio di energia fa si che vi sia una sola variabile di stato, $v_C(t)$, e per questo il circuito è detto del 1° ordine**
- **l'incognita compare sempre con esponente 1, si tratta quindi di una equazione lineare (da cui: circuito lineare)**
- **i parametri R e C sono costanti nel tempo, per cui i, circuito è stazionario**
- **tutti i termini rappresentano una tensione, per cui il prodotto RC deve avere le dimensioni di un tempo; è chiamato costante di tempo.**

Nota storica

Le equazioni differenziali fecero la loro comparsa con Newton e Leibniz, impegnati nello studio (soprattutto Newton) del movimento dei corpi (inizio '700).

Newton elaborò dei metodi numerici, ma col tempo divennero sempre più pesanti da gestire: la *rivoluzione industriale* obbligò a una maggiore precisione e quindi a un notevole aumento dei calcoli, da svolgere manualmente.

A fine '700 si cercarono altre vie per la soluzione delle equazioni differenziali: metodi analitici:

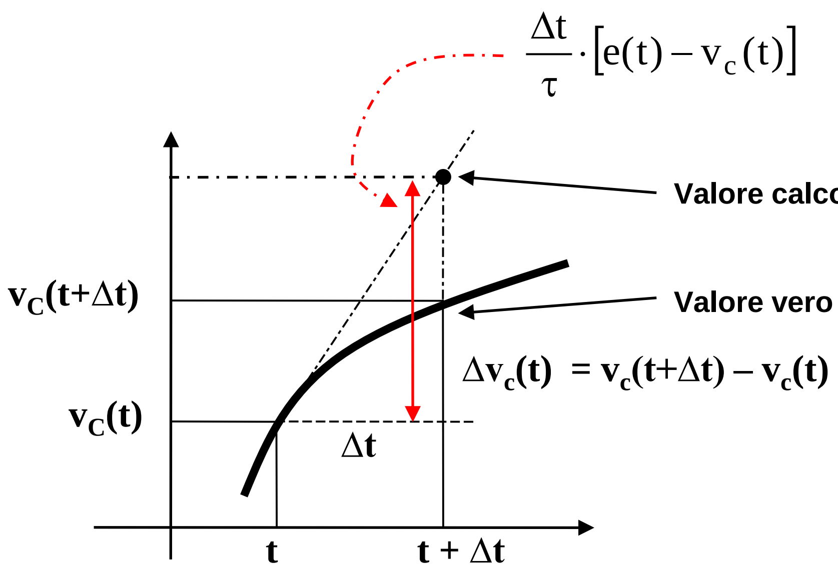
Vantaggio: calcolo del valore all'istante desiderato senza la necessità di calcolare i valori di tutti gli istanti precedenti

**Svantaggio: soluzione valida per una predefinita forma dell'ingresso;
difficoltà di trovare la soluzione per alcune equazioni e/o alcuni ingressi.**

Con lo sviluppo dei calcolatori (metà '900) si ebbe una ripresa dei metodi numerici.

SOLUZIONE NUMERICA

La soluzione numerica consiste nella trasformazione dell'intervallo infinitamente piccolo dt in un intervallo finito Δt (<u>passo di integrazione</u>):



$$\tau \cdot \frac{\Delta v_c(t)}{\Delta t} + v_c(t) = e(t)$$

<u>Equazione alle differenze finite</u>

$$v_c(t+\Delta t) = v_c(t) + \frac{\Delta t}{\tau} \cdot \left[e(t) - v_c(t)\right]$$

<u>Soluzione numerica</u> dell'equazione differenziale

<u>Osservazione</u>: l'errore di calcolo è tanto più piccolo quanto minore è il passo di integrazione.

ESEMPIO:

R = 40 Ω, C = 50 mF, e(t) = 12 V.

Per la scelta del passo di integrazione Δt si segue il seguente criterio: una frazione della costante di tempo.

<u>Soluzione</u>:

$$\tau = R \cdot C = 40 \cdot 50 \cdot 10^{-3} = 2 \quad s$$

$$v_c(t+\Delta t) = v_c(t) + \frac{\Delta t}{\tau}\left(e(t) - v_c(t)\right)$$

$$i(t) = \frac{e(t) - v_c(t)}{R}$$

Δt = (1/5) τ	t	e(t)	v_c (V)	i (A)
	0.0	12	0.00	0.300
0.4	0.4	12	2.40	0.240
0.4	0.8	12	4.32	0.192
0.4	1.2	12	5.86	0.154
0.4	1.6	12	7.08	0.123
0.4	2.0	12	8.07	0.0983
0.4	2.4	12	8.85	0.0786
0.4	2.8	12	9.48	0.0629
0.4	3.2	12	9.99	0.0503
0.4	3.6	12	10.4	0.0403
0.4	4.0	12	10.7	0.0322

Δt = (1/10) τ	t	e(t)	v_c(t)	i (A)
	0.0	12	0.00	0.300
0.2	0.2	12	1.20	0.270
0.2	0.4	12	2.28	0.243
0.2	0.6	12	3.25	0.219
0.2	0.8	12	4.13	0.197
0.2	1.0	12	4.91	0.177
0.2	1.2	12	5.62	0.159
0.2	1.4	12	6.26	0.143
0.2	1.6	12	6.83	0.129
0.2	1.8	12	7.35	0.116
0.2	2.0	12	7.82	0.105

ESEMPIO:

R = 330 Ω, C = 10 mF.

Compilare la seguente tabella:

$$\tau = R \cdot C = 330 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 3.3 \quad s$$

t	**e(t)**	$v_c(t+\Delta t) = v_c(t) + \frac{\Delta t}{\tau}\left(e(t) - v_c(t)\right)$	$i(t) = \frac{e(t) - v_c(t)}{R}$
0.0	**0**	**2.00 [V]**	**- 6.06 [mA]**
0.2	**12**	$v_c(0.2) = 2 + \frac{0.2}{3.3}(0-2) = 1.88$	**30.7**
0.5	**12**	$v_c(0.5) = 1.88 + \frac{0.3}{3.3}(12-1.88) = 2.80$	**27.9**
1.0	**0**	$v_c(1.0) = 2.80 + \frac{0.5}{3.3}(12-2.80) = 4.19$	**- 12.7**
1.4	**0**	$v_c(1.4) = 4.19 + \frac{0.4}{3.3}(0-4.19) = 3.68$	**- 11.2**
2.0	**12**	$v_c(2.0) = 3.68 + \frac{0.6}{3.3}(0-3.68) = 3.01$	**27.2**

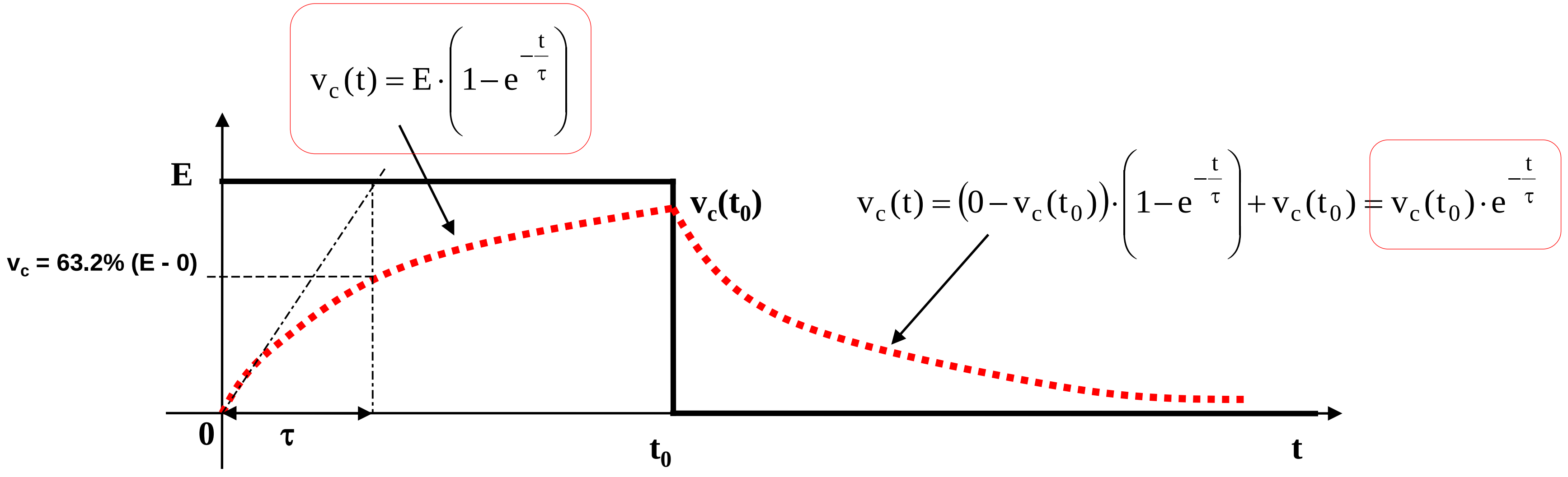
SOLUZIONE ANALITICA

Nel caso di una tensione di alimentazione e(t) = E = costante, l'equazione differenziale presenta la seguente soluzione:

$$v_c(t) = (E - v_c(0)) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + v_c(0)$$

Se $E - v_c(0) > 0$ **è in corso la <u>carica</u> del condenstore**

Se $E - v_c(0) < 0$ **è in corso la <u>scarica</u> del condensatore**

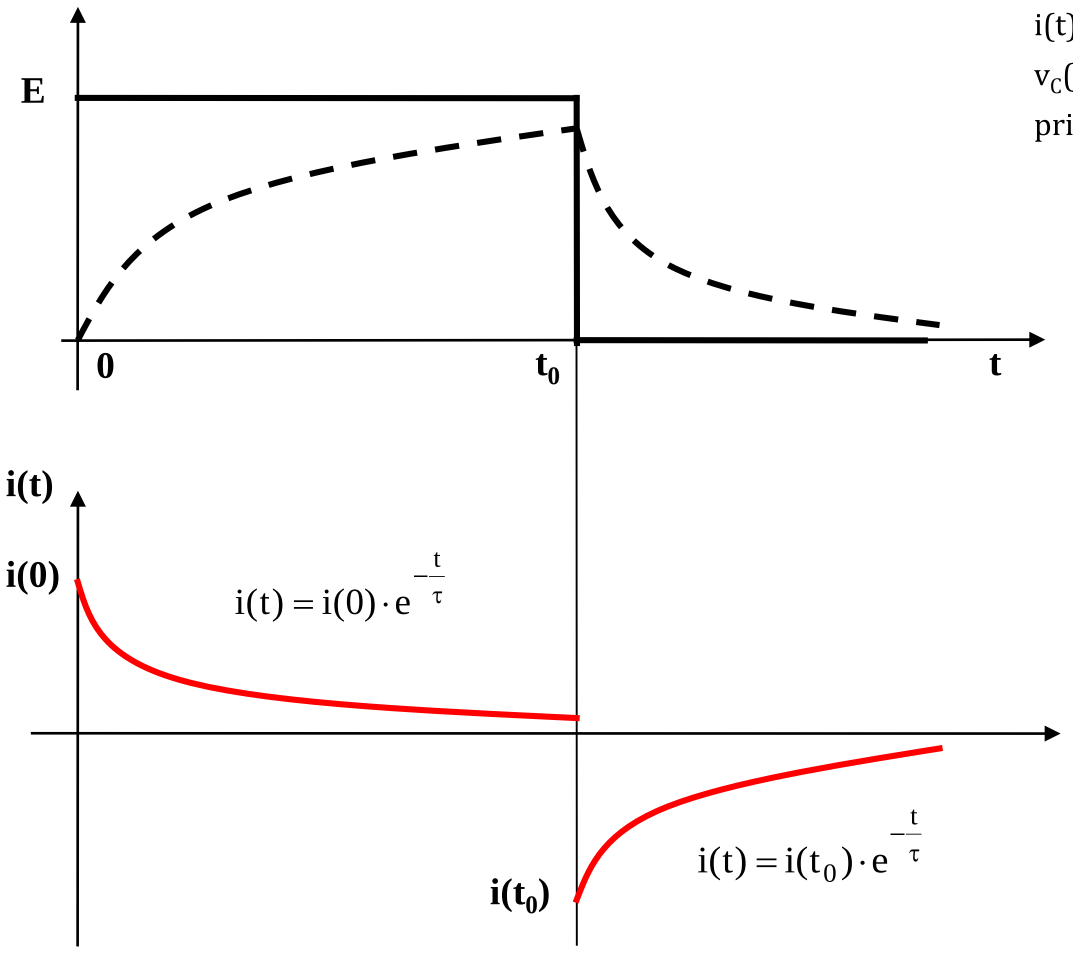


ESEMPIO:

Stesso circuito risolto per via numerica: R = 40 Ω, C = 50 mF, e(t) = 12 V.

$\Delta t = (1/10)\,\tau$	t	e(t)	$v_c(t)$	i (A)	$v_c(t) = E \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$	$i(t) = \frac{e(t) - v_c(t)}{R}$
	0.0	12	0.00	0.300	0.00	0.300
0.2	0.2	12	1.20	0.270	1.41	0.271
0.2	0.4	12	2.28	0.243	2.18	0.246
0.2	0.6	12	3.25	0.219	3.11	0.222
0.2	0.8	12	4.13	0.197	3.96	0.201
0.2	1.0	12	4.91	0.177	4.72	0.182
0.2	1.2	12	5.62	0.159	5.41	0.165
0.2	1.4	12	6.26	0.143	6.04	0.149
0.2	1.6	12	6.83	0.129	6.61	0.135
0.2	1.8	12	7.35	0.116	7.12	0.122
0.2	2.0	12	7.82	0.105	7.59	0.110

<u>NB</u>: la corrente ha un andamento opposto a quello della $v_C(t)$:



<u>Osservazione</u>:

$i(t)$ ha un picco massimo quando $v_C(t)$ è minima; il picco di $i(t)$ viene prima quello di $v_C(t)$.

<u>NB:</u>

$i(t)$ può essere calcolata (conoscendo $v_C(t)$) anche facendo riferimento alla legge di Ohm.

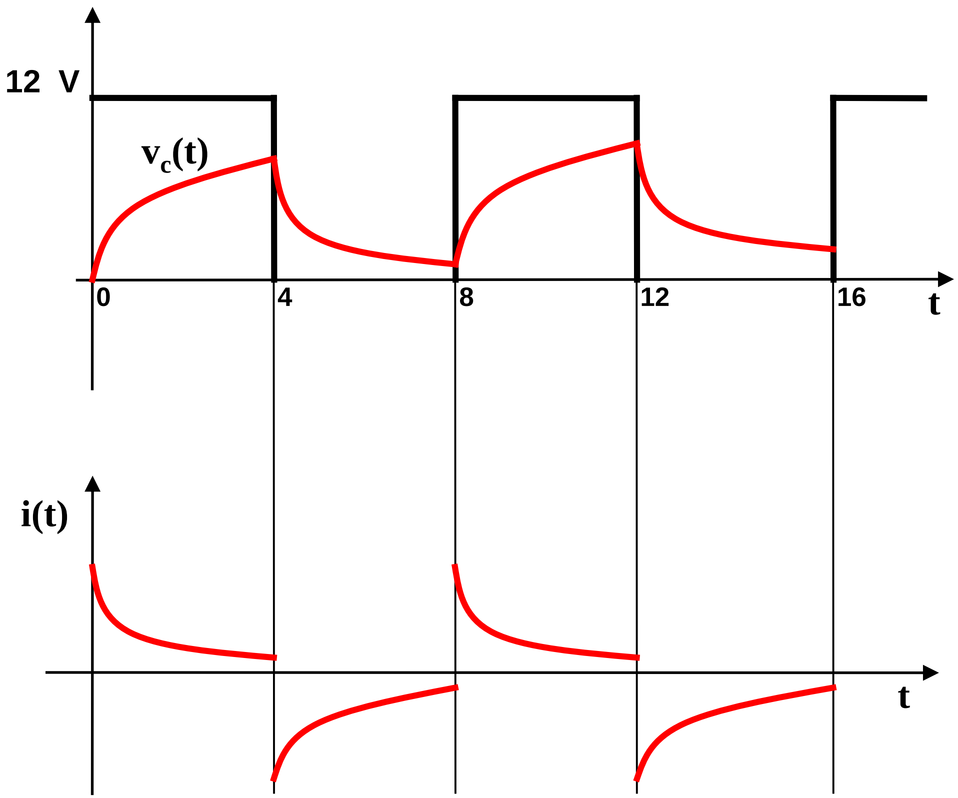
Negli istanti di discontinuità della $e(t)$ occorre distinguere tra un momento immediatamente prima t_0^- e un momento immediatamente dopo t_0^+:

$$i(t_0^-) = \frac{E - v_c(t_0)}{R}$$

$$i(t_0^+) = \frac{0 - v_c(t_0)}{R}$$

ESEMPIO:

Stesso circuito risolto per via numerica: R = 200 Ω, C = 10 mF, $v_C(0) = 0$ V.



$$\tau = R \cdot C = 200 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 2 \quad s$$

$$v_c(4) = (12-0) \cdot \left(1 - e^{-\frac{4}{\tau}}\right) + 0 = 10.4 \quad V$$

$$v_c(8) = v_c(4) \cdot e^{-\frac{4}{\tau}} = 1.40 \quad V$$

$$v_c(12) = (12 - v_c(8)) \cdot \left(1 - e^{-\frac{4}{\tau}}\right) + v_c(8) = 10.6 \quad V$$

$$v_c(16) = v_c(12) \cdot e^{-\frac{4}{\tau}} = 1.43 \quad V$$

$$i(0) = \frac{12-0}{R} = 60 \quad mA$$

$$i(4^-) = i(0) \cdot e^{-\frac{4}{\tau}} = \frac{12 - v_c(4)}{R} = 8.12 \quad mA$$

$$i(4^+) = \frac{0 - v_c(4)}{R} = -51.9 \quad mA$$

$$i(8^-) = i(4^+) \cdot e^{-\frac{4}{\tau}} = \frac{0 - v_c(8)}{R} = -7.02 \quad mA$$

$$i(8^+) = \frac{12 - v_c(8)}{R} = 53.0 \quad mA$$

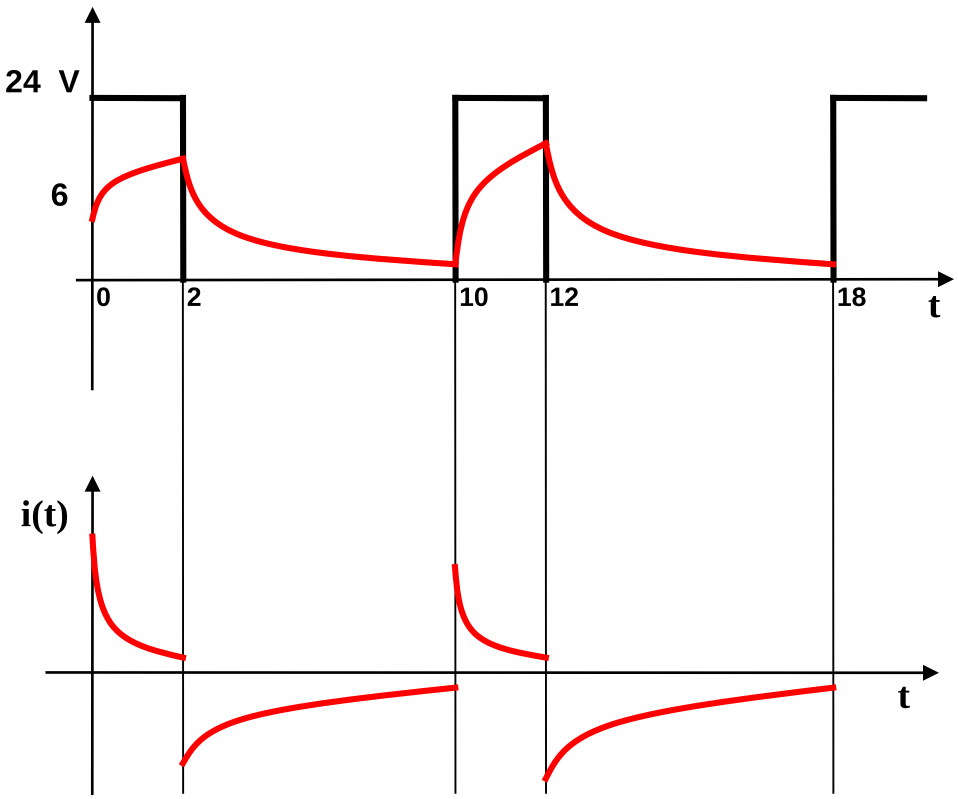
$$i(12^-) = i(8^+) \cdot e^{-\frac{4}{\tau}} = \frac{12 - v_c(12)}{R} = 7.17 \quad mA$$

$$i(12^+) = \frac{0 - v_c(12)}{R} = -52.8 \quad mA$$

$$i(16^-) = i(12^+) \cdot e^{-\frac{4}{\tau}} = \frac{0 - v_c(16)}{R} = -7.15 \quad mA$$

ESEMPIO:

Stesso circuito risolto per via numerica: R = 150 Ω, C = 20 mF, $v_C(0)$ = 6 V.



$$\tau = R \cdot C = 150 \cdot 20 \cdot 10^{-3} = 3 \quad s$$

$$v_c(2) = (24 - v_c(0)) \cdot \left(1 - e^{-\frac{2}{\tau}}\right) + v_c(0) = 14.8 \quad V$$

$$v_c(10) = v_c(2) \cdot e^{-\frac{8}{\tau}} = 1.03 \quad V$$

$$v_c(12) = (12 - v_c(10)) \cdot \left(1 - e^{-\frac{2}{\tau}}\right) + v_c(10) = 6.37 \quad V$$

$$v_c(18) = v_c(12) \cdot e^{-\frac{6}{\tau}} = 0.861 \quad V$$

$$i(0) = \frac{24 - v_c(0)}{R} = 120 \quad mA$$

$$i(2^-) = i(0) \cdot e^{-\frac{2}{\tau}} = \frac{24 - v_c(2)}{R} = 61.6 \quad mA$$

$$i(2^+) = \frac{0 - v_c(2)}{R} = -98.4 \quad mA$$

$$i(10^-) = i(2^+) \cdot e^{-\frac{8}{\tau}} = \frac{0 - v_c(10)}{R} = -6.84 \quad mA$$

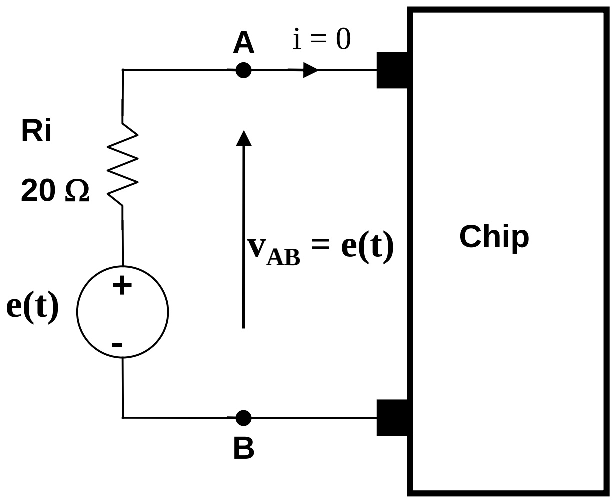
$$i(10^+) = \frac{24 - v_c(10)}{R} = 153 \quad mA$$

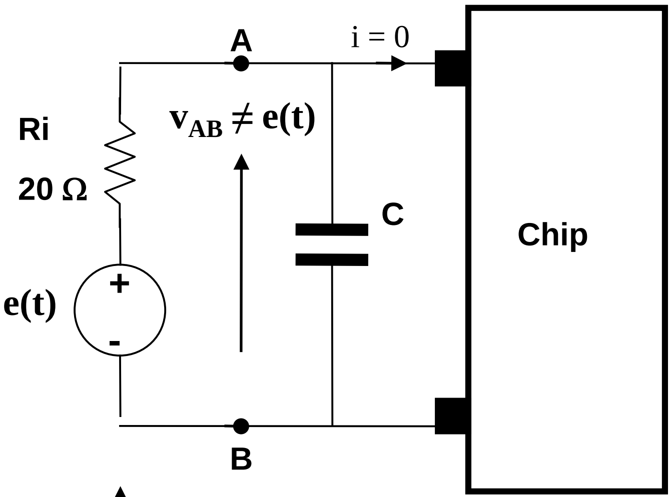
$$i(12^-) = i(10^+) \cdot e^{-\frac{2}{\tau}} = \frac{24 - v_c(12)}{R} = 118 \quad mA$$

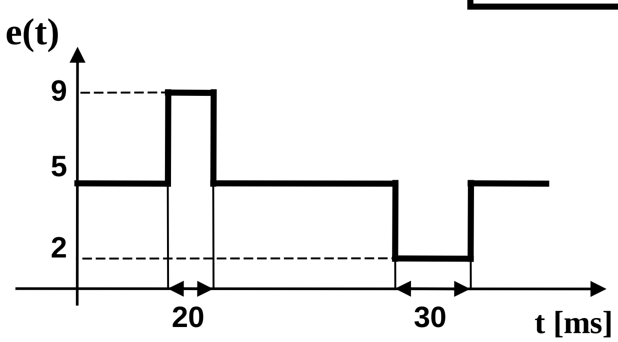
$$i(12^+) = \frac{0 - v_c(12)}{R} = -42.4 \quad mA$$

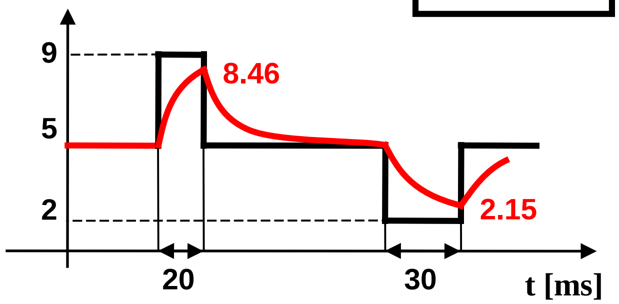
$$i(18^-) = i(12^+) \cdot e^{-\frac{6}{\tau}} = \frac{0 - v_c(18)}{R} = -5.74 \quad mA$$

ESERCIZIO: proprietà filtrante rispetto alle brusche variazioni di tensione



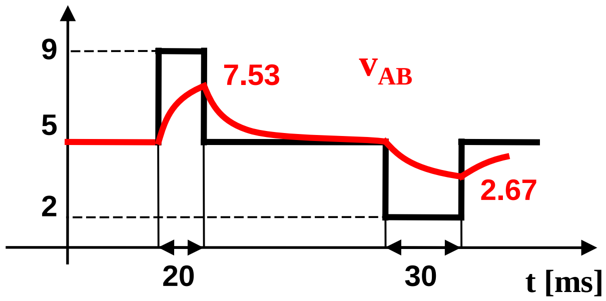






C = 500 μF

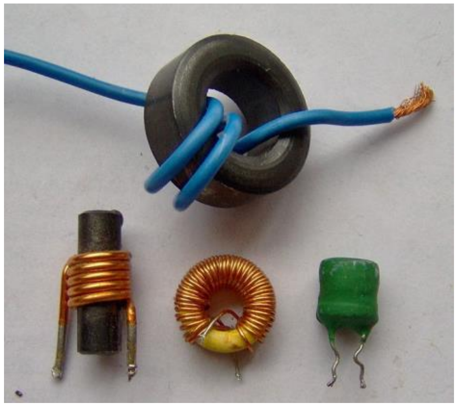
τ = 10 ms



C = 1000 μF

τ = 20 ms

INDUTTORE



Nota Storica:

1808: il prof (ad Halle: chimico, fisico e matematico) Johann Schweigger nota che in prossimità di un conduttore percorso da corrente l'ago magnetico viene deviato.

1820: Schweigger costruisce una bobina mobile con indicatore per rilevare il passaggio di corrente. Seebek lo chiamò *"moltiplicatore"*.

1825: William Sturgeon costruisce il primo elettromagnete (conduttore avvolto su ferro, non isolato).

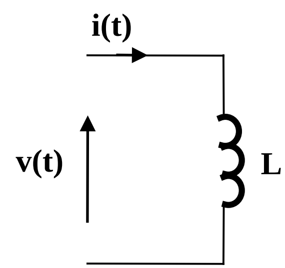
1827: Joseph Henry potenzia l'elettromagnete con più spire isolate.

1830: Legge dell'induzione elettromagnetica

$$v(t) = -\frac{d\Phi_c(t)}{dt} = -N \cdot \frac{d\Phi(t)}{dt}$$

DEFINIZIONE: componente in grado di accumulare energia elettromagnetica:

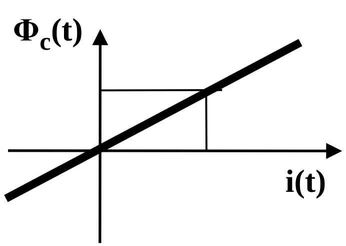
$$W_m(t) = \frac{1}{2} \cdot i(t) \cdot \Phi_c(t)$$



Parametro principale: induttanza L.

Se la caratteristica è <u>lineare</u>: $\Phi_c(t) = L \cdot i(t)$

Quindi: $L = \dfrac{\Phi_c(t)}{i(t)} = \dfrac{N \cdot \Phi(t)}{i(t)}$ $\qquad [H] = \dfrac{[Wb]}{[A]}$



$$v(t) = -L \cdot \frac{d\,i(t)}{dt}$$

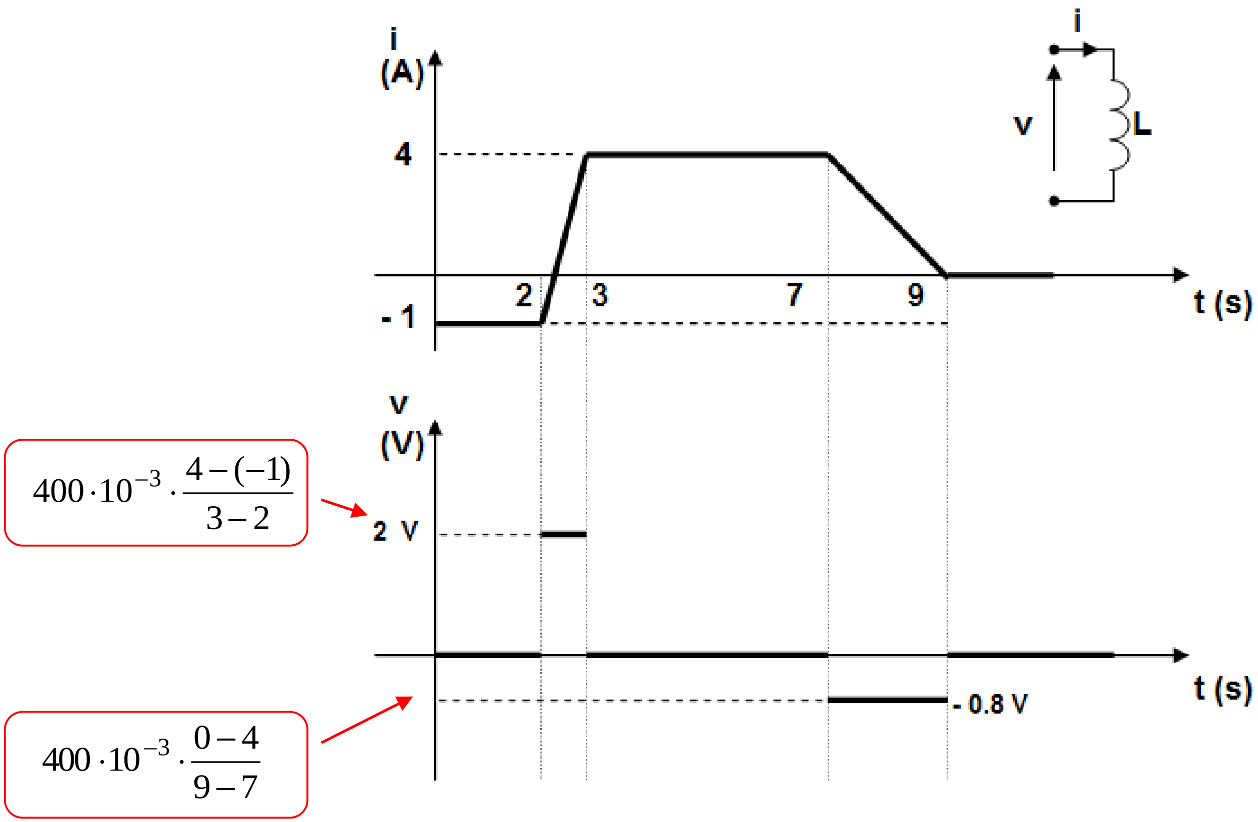
Da cui: $L = \dfrac{v(t)}{\dfrac{d\,i(t)}{dt}}$

$$W_m(t) = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i(t)^2$$

<u>NB</u>: una interruzione repentina della corrente in un ciruito fortemente induttivo può creare pericolse sovratensioni.

ESEMPIO:

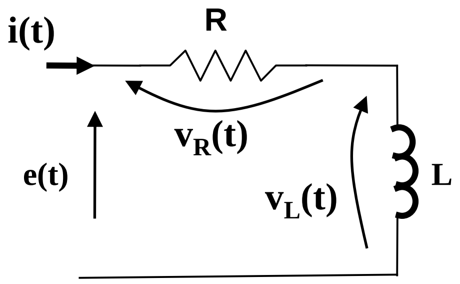
Un Induttore, con L = 400 mH, è alimentato con la corrente in grafico. Calcolare e disegnare l'andamento della tensione ai suoi capi.



$$400 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{4-(-1)}{3-2}$$

$$400 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{0-4}{9-7}$$

CIRCUITO OHMICO - INDUTTIVO



Accumulatori di energia: **<u>induttore</u>** $W_m(t) = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i(t)^2$

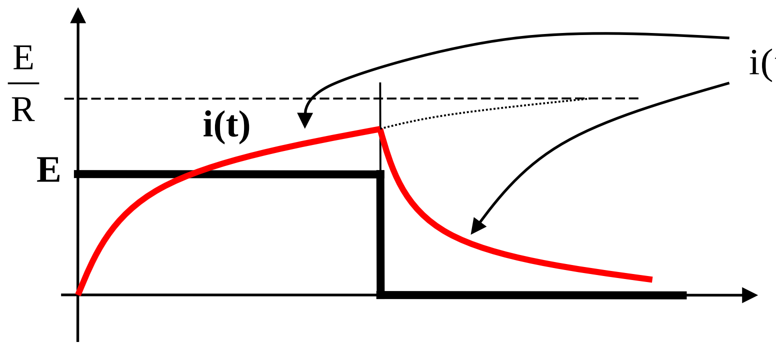
Per cui variabile di stato: i(t)

Legge fisica: Kirchhoff alla maglia: $e(t) = R \cdot i(t) + v_L(t)$

Da cui: $\frac{L}{R} \cdot \frac{d\,i(t)}{dt} + i(t) = \frac{e(t)}{R}$ **<u>Equazione differenziale</u>** $\tau = \frac{L}{R}$

SOLUZIONE NUMERICA: $i(t+\Delta t) = i(t) + \frac{\Delta t}{\tau} \cdot \left(\frac{e(t)}{R} - i(t) \right)$

SOLUZIONE ANALITICA: **per e(t) = E = costante**



$$i(t) = (i_{FIN} - i_{IN}) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) + i_{IN}$$

$$v_L(t) = E - R \cdot i(t) = (v_L)_{IN} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

ESEMPIO:

R = 1.5 Ω, L = 3 H, e(t) = 20 V, i(0) = 0 A.

Per la scelta del passo di integrazione Δt si segue il seguente criterio: una frazione della costante di tempo.

Soluzione:

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{3}{1.5} = 2 \quad s$$

$$i(t+\Delta t) = i(t) + \frac{\Delta t}{\tau} \cdot \left(\frac{e(t)}{R} - i(t) \right)$$

$$v_L(t) = E - R \cdot i(t)$$

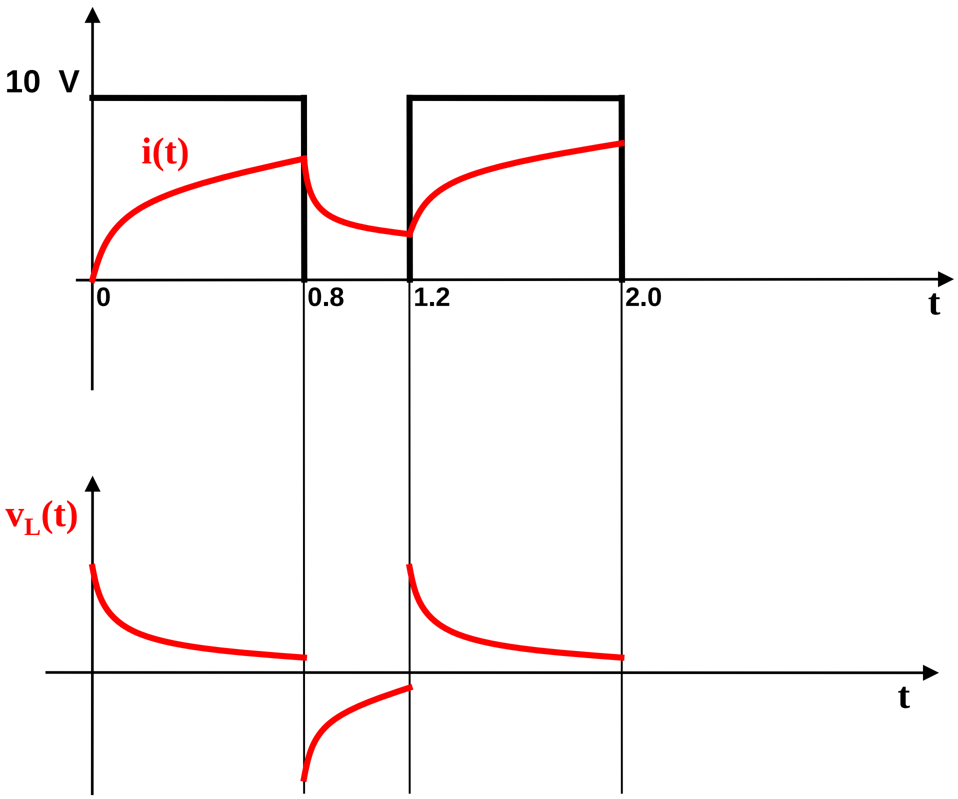
Si assume: $\Delta t = \frac{\tau}{4} = 0.5 \quad s$

NB: passo costante

t	e(t)	i(t)	v_L(t)	Potenza dissipata su R: $R \cdot i^2$	Energia dissipata su R	i(t) analitico
0.0 s	20 V	0.00 A	20 V	0 W	0 J	0 A
0.5	20	3.33	15	16.7	8.33	2.95
1.0	20	5.83	11.3	51.0	33.9	5.25
1.5	20	7.71	8.44	89.1	78.4	7.04
2.0	20	9.11	6.33	125	141	8.43
2.5	20	10.2	4.75	155	218	9.51
3.0	20	11.0	3.56	180	308	10.4
3.5	20	11.6	2.67	200	408	11.0
4.0	20	12.0	2.00	216	516	11.5
4.5	20	12.3	1.51	228	631	11.9

ESEMPIO:

Circuito RL: R = 1 Ω, L = 600 mH, i(0) = 0 A.



$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{600 \cdot 10^{-3}}{1} = 0.6 \quad s$$

$$i(0.8) = \left(\frac{10}{1} - 0\right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{0.8}{\tau}}\right) + 0 = 7.36 \quad A$$

$$i(1.2) = i(0.8) \cdot e^{-\frac{0.4}{\tau}} = 3.78 \quad A$$

$$i(2.0) = \left(\frac{10}{1} - i(1.2)\right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{0.8}{\tau}}\right) + i(1.2) = 8.36 \quad A$$

$$v_L(0) = 10 - R \cdot i(0) = 10 \quad V$$

$$v_L(0.8^-) = 10 - R \cdot i(0.8) = v_L(0) \cdot e^{-\frac{0.8}{\tau}} = 2.64 \quad V$$

$$v_L(0.8^+) = 0 - R \cdot i(0.8) = -7.36 \quad V$$

$$v_L(1.2^-) = 0 - R \cdot i(1.2) = v_L(0.8^+) \cdot e^{-\frac{0.4}{\tau}} = -3.78 \quad V$$

$$v_L(2.0^-) = 0 - R \cdot i(2.0) = v_L(1.2^+) \cdot e^{-\frac{0.8}{\tau}} = 1.64 \quad V$$

$$v_L(1.2^+) = 10 - R \cdot i(1.2) = 6.22 \quad V$$

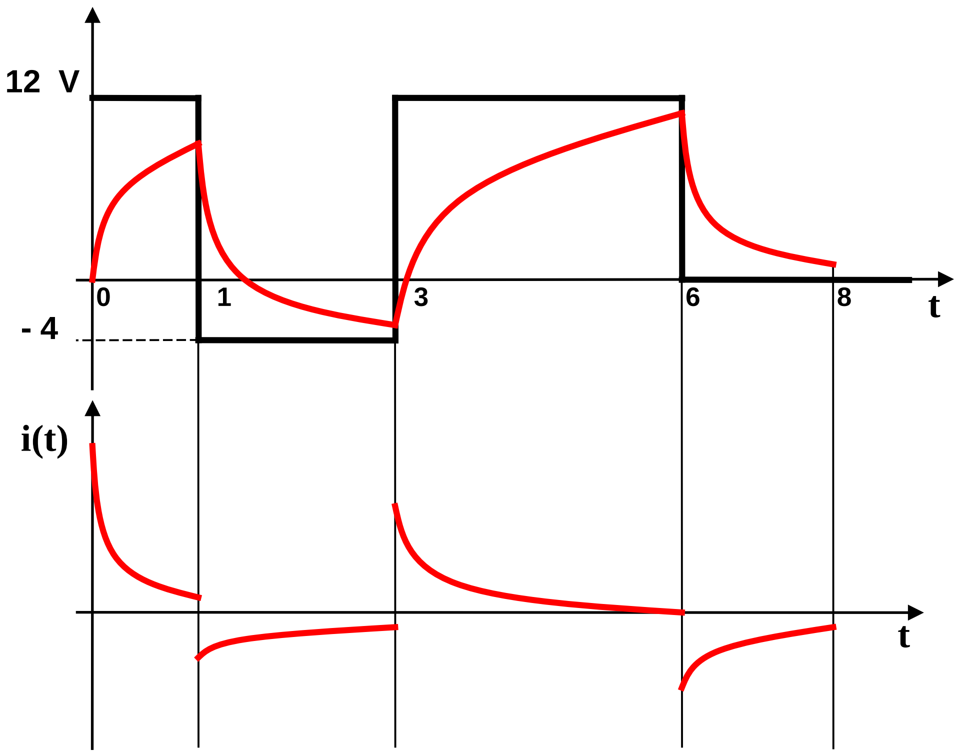
<u>Osservazione</u>:

i(t) ha un massimo quando v_L(t) è minima; il picco di i(t) viene dopo quello di v_L(t).

ESERCIZIO:

R = 10 Ω, C = 60 mF, $v_c(0)$ = 0 V.

$$\tau = R \cdot C = 10 \cdot 60 \cdot 10^{-3} = 0.3 \ \text{s}$$



$$v_c(1) = (12 - v_c(0)) \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}}\right) + v_c(0) = 9.73 \ \text{V}$$

$$v_c(3) = (-4 - v_c(1)) \cdot \left(1 - e^{-\frac{2}{\tau}}\right) + v_c(1) = -3.51 \ \text{V}$$

$$v_c(6) = (12 - v_c(3)) \cdot \left(1 - e^{-\frac{3}{\tau}}\right) + v_c(3) = 11.90 \ \text{V}$$

$$v_c(8) = v_c(6) \cdot e^{-\frac{2}{\tau}} = 0.425 \ \text{V}$$

$$i(0) = \frac{12 - v_c(0)}{R} = 1.2 \ \text{A}$$

$$i(1^-) = \frac{12 - v_c(1)}{R} = 0.227 \ \text{A}$$

$$i(1^+) = \frac{-4 - v_c(3)}{R} = -1.37 \ \text{A}$$

$$i(3^+) = \frac{12 - v_c(3)}{R} = 1.55 \ \text{A}$$

$$i(6^+) = \frac{0 - v_c(6)}{R} = -1.19 \ \text{A}$$

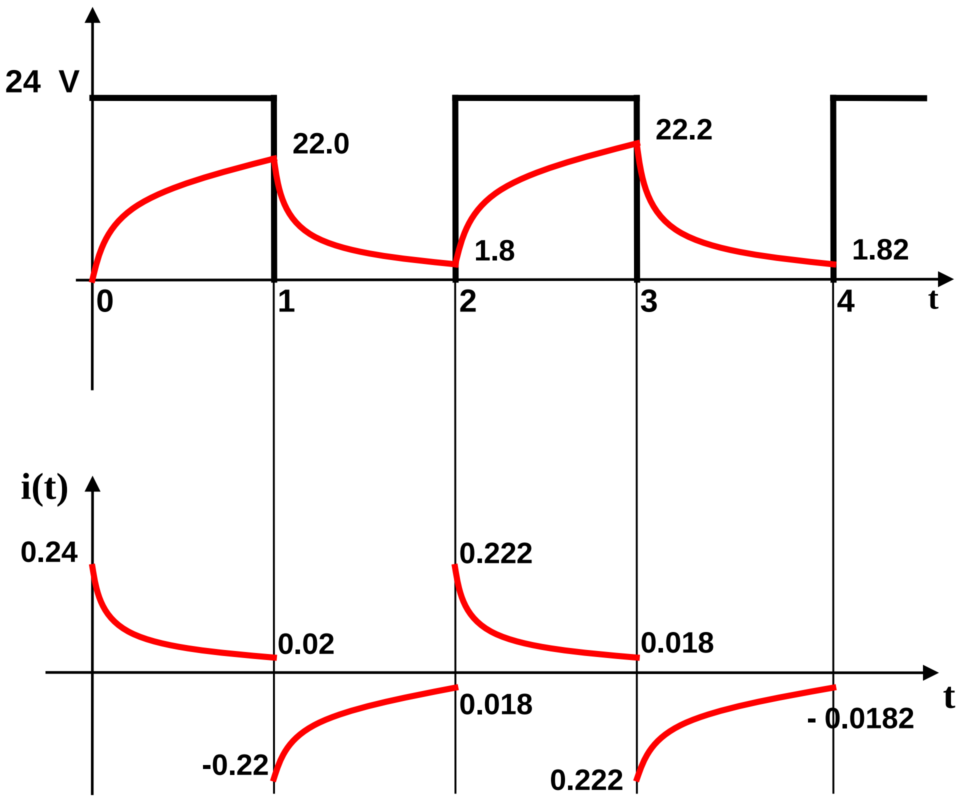
$$i(3^-) = \frac{-4 - v_c(3)}{R} = -0.049 \ \text{A}$$

$$i(6^-) = \frac{12 - v_c(6)}{R} = 0.010 \ \text{A}$$

$$i(8) = \frac{0 - v_c(8)}{R} = -0.0425 \ \text{A}$$

ESERCIZIO:

R = 100 Ω, C = 40 mF, $v_c(0)$ = 0 V.



ESERCIZIO:

R = 1.5 Ω, L = 3 H, i(0) = 0.6 A. Risolvere per via numerica il circuito secondo i dati indicati in tabella:

<u>Soluzione</u>: $$\tau = \frac{L}{R} = \frac{3}{1.5} = 2 \quad s$$

NB: passo variabile

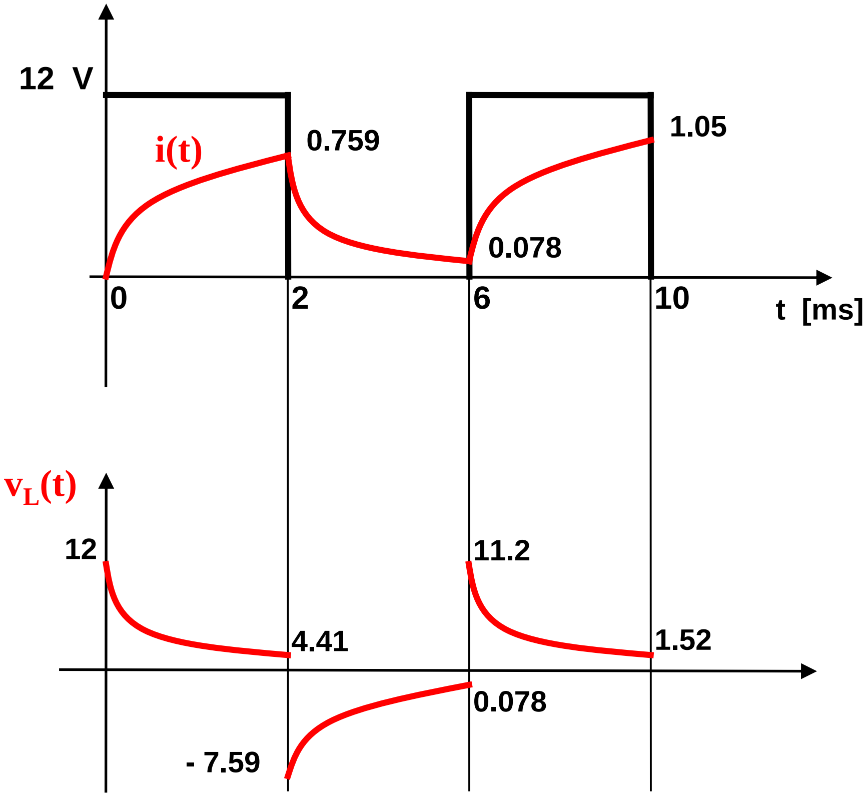
t	e(t)	i(t)	v_L(t)
0 s	0 V	0.6 A	- 0.9 V
0.1	16	0.57	15.1
0.3	16	1.58	13.6
0.6	4	2.94	- 414
1.0	4	2.89	- 0.331
1.5	0	2.83	- 4.25

$$i(t+\Delta t) = i(t) + \frac{\Delta t}{\tau} \cdot \left(\frac{e(t)}{R} - i(t) \right)$$

$$v_L(t) = E - R \cdot i(t)$$

ESERCIZIO:

R = 10 Ω, L = 20 mH, i(0) = 0 A.



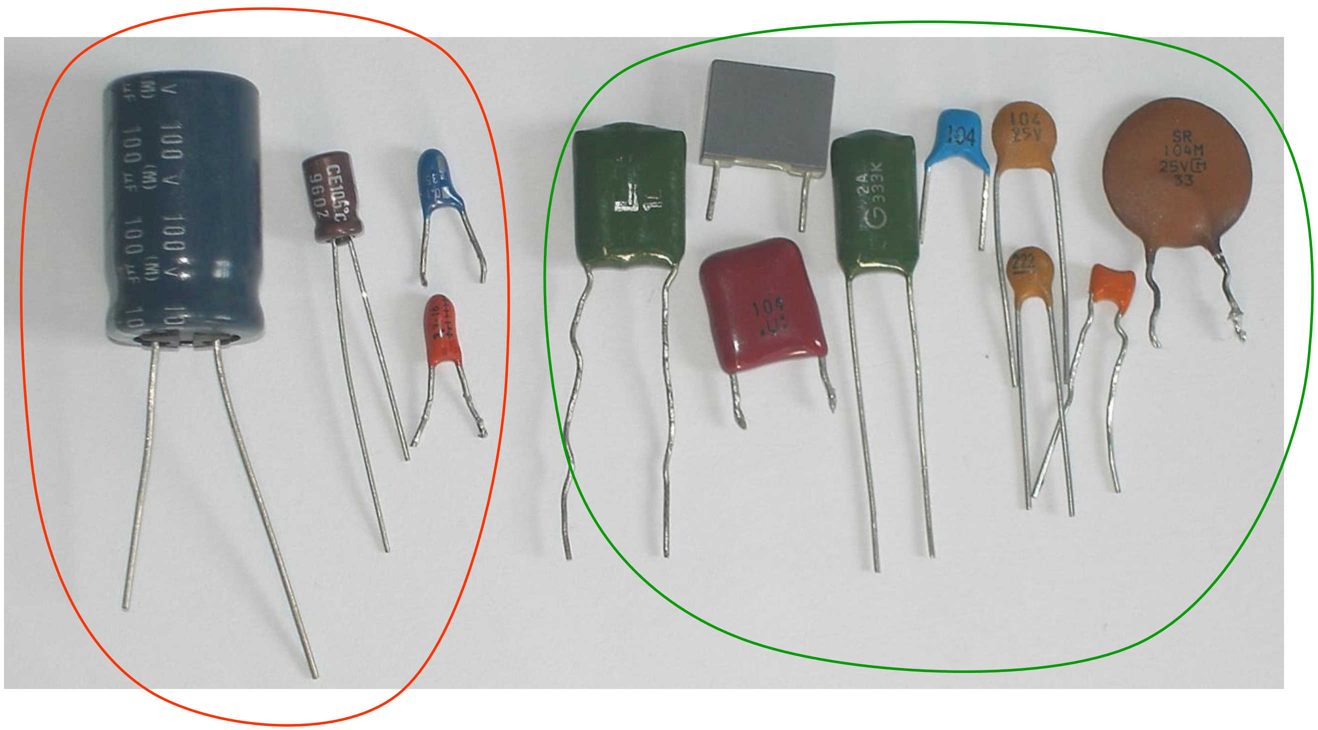
$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{0.02}{10} = 2 \quad ms$$

TECNOLOGIE COSTRUTTIVE

Esistono molti tipi di condensatori, in relazione al tipo di dielettrico.

POLARIZZATI: condensatori in cui il dielettrico è polarizzato, per cui *in fase di montaggio occorre rispettare le polarità dei terminali.*

NON POLARIZZATI: condensatori in cui il dielettrico non è polarizzato, per cui *in fase di montaggio non ci sono vincoli di polarità sui terminali.*

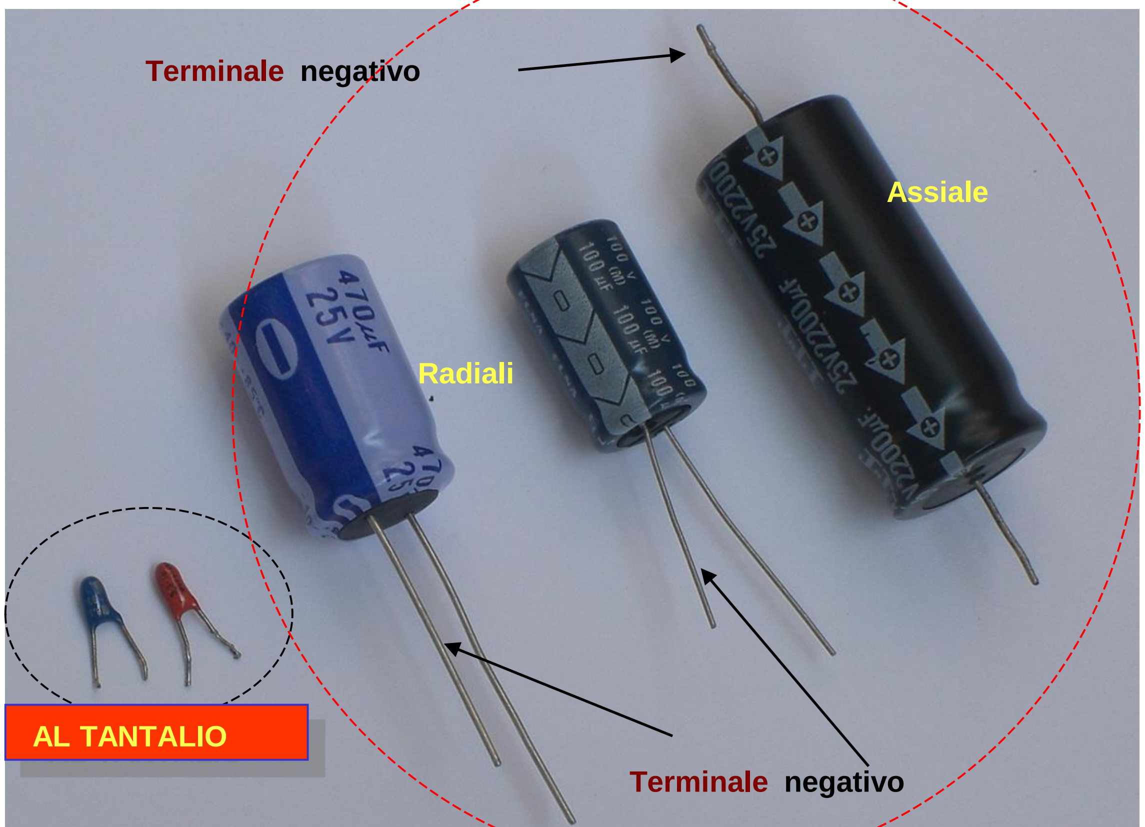


NB: In un circuito in c. a. si devono usare condensatori non polarizzati.

CONDENSATORE POLARIZZATO

ELETTROLITICI

Capacità tra 0.1 uF e qualche decina di mF



BACK UP

Alta capacità: tra 0.1 – 10 F.

Utilizzati come batteria tampone in caso di black-out.

Tensioni di lavoro $\leq$ 6 V.

CONDENSATORE <u>NON POLARIZZATO</u>

POLIESTERE:

- **capacità al massimo di qualche μF**
- **adatti per basse frequenze (*max ca. 1 MHz*)**

CERAMICI:

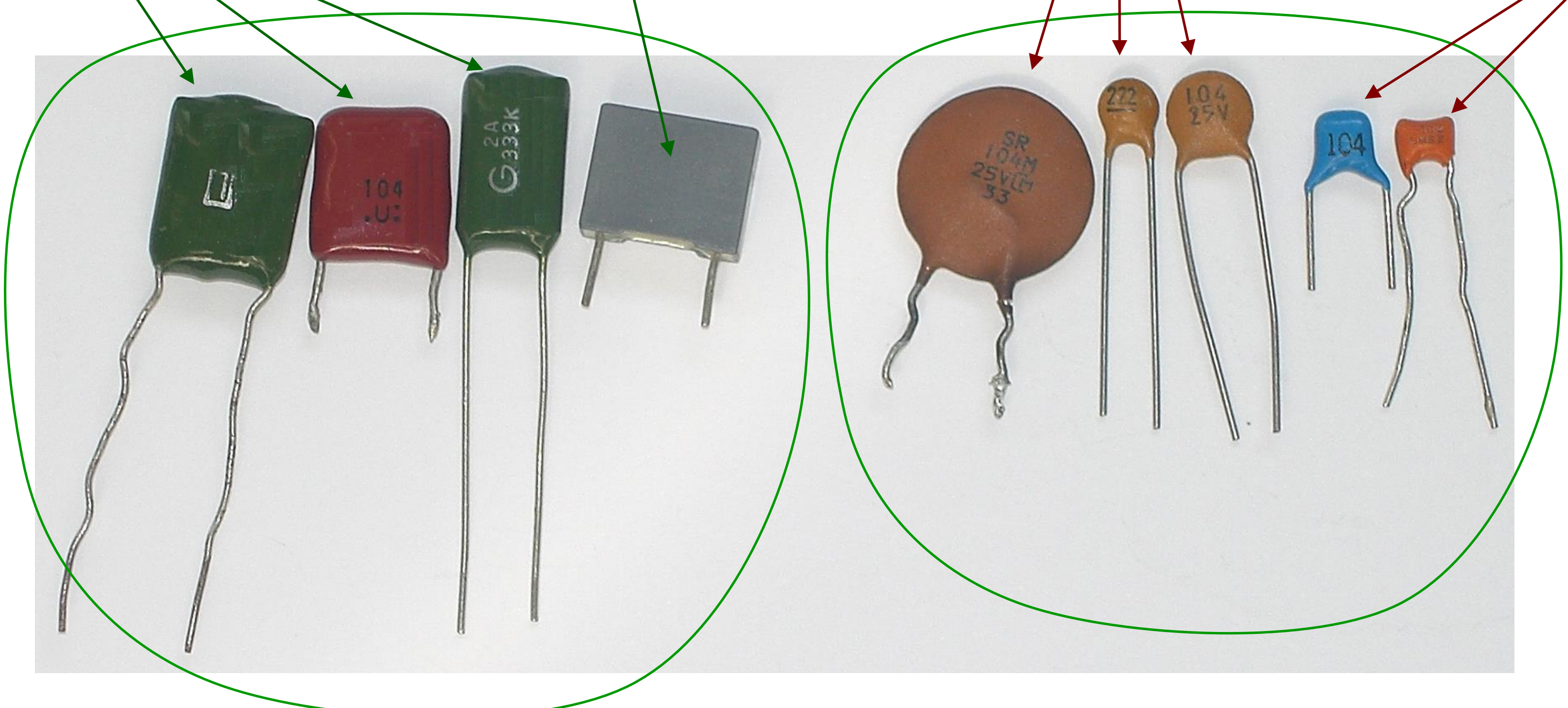
- **capacità compresa tra ca. 1 pF e 100 nF**
- **piccoli, economici, ideali in alta frequenza (*centinaia di MHz*)**

Metallizzato: **buona qualità e stabilità alla temperatura**

Radiale (Mylar)

A disco: **maggiori perdite, meno stabili con la temperatura**

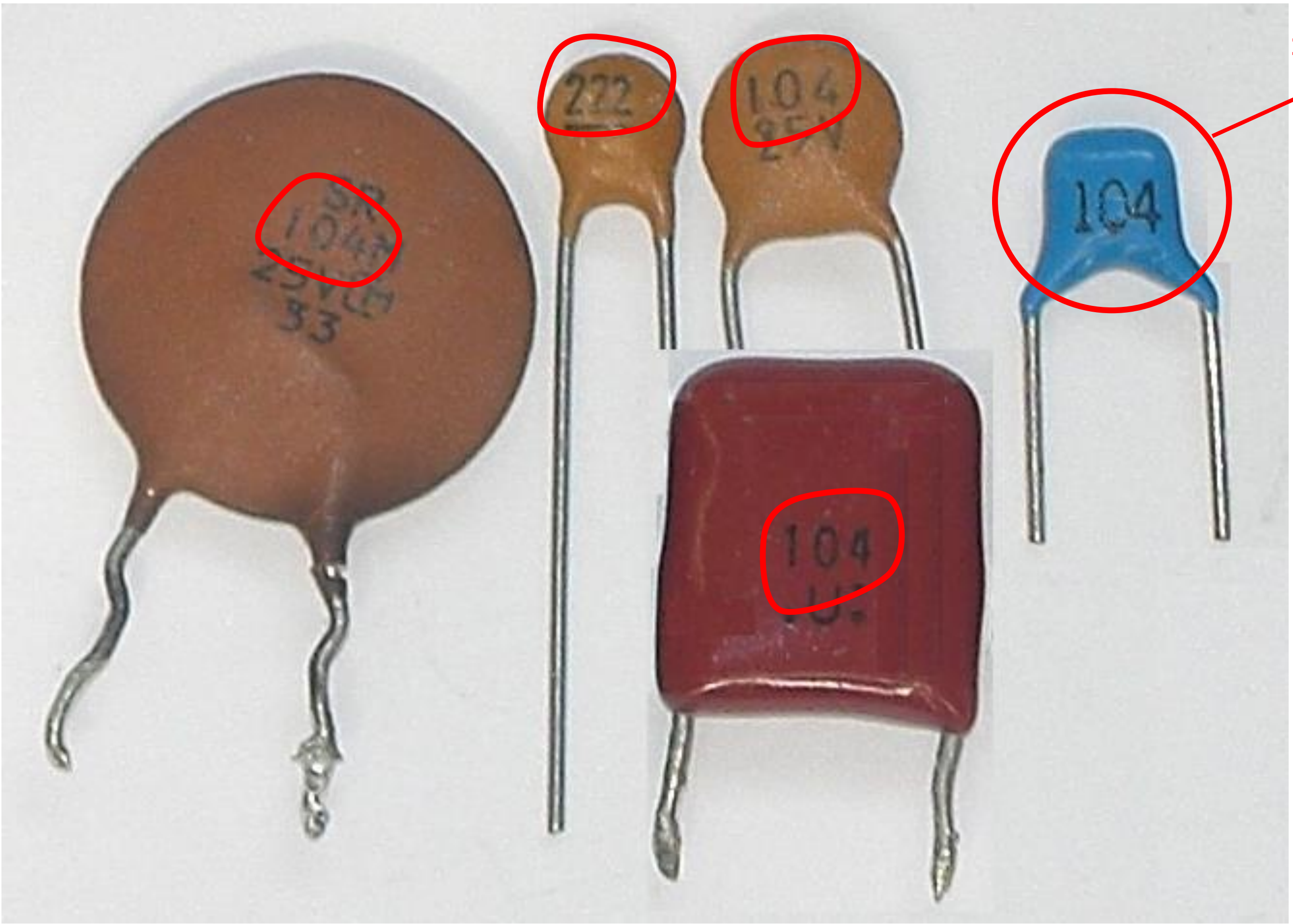
Multistrato



Codici per condensatori ceramici

Il valore della capacità si trova scritto sul corpo del componente attraverso tre cifre:

- **le *prime due* indicano la capacità in pF**
- **la *terza* indica il numero di zeri da aggiungere**



10 0000 pF = 100 nF